فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران
سال پانزدهم، شماره ۵۷، تابستان ۱۳۹۹، ۱۹۰ – ۱۵۵

Journal of Curriculum Studies (J. C. S)
Vol. 15 (57); 2020, 155-190

دیدگاه معلمان نسبت به تأثیر ریاضی دانشگاهی بر تدریس ریاضی مدرسه‌ای[۱]

Teachers' Perspective of how High School Mathematics is influenced by University Mathematics

تاریخ دریافت مقاله: ۱۱ /۱۳۹۸/۱۱؛ تاریخ پذیرش مقاله: ۰۲ /۱۳۹۹/۰۵

حمیده سرشتی[۲]

زهرا گویا[۳]

چکیده: در دهه اخیر، یکی از انواع دانش‌هایی که برای آماده‌سازی معلمان دبیرستان مورد توجه قرار گرفته، «دانش محتواییِ تخصصی‌شدهٔ ریاضی مدرسه‌ای» است که تمرکز آن، بر چگونگی ایجاد ارتباط بین ریاضیِ دانشگاهی و ریاضی مدرسه‌ای است. برای شناسایی این دانش، پژوهشی طراحی شد که هدف اصلی آن، توصیف چگونگیِ استفاده معلمان از ریاضی دانشگاهی در تدریس ریاضی مدرسه‌ای بود و در آن، ۱۹ معلم ریاضی دبیرستان که همگی تجربه تدریس حسابان را داشتند، به‌طور داوطلب شرکت کردند. رویکرد این پژوهش کیفی بود و داده-های آن، با استفاده از اطلاعات جمعیت‌شناختی، مصاحبه‌های نیمه-ساختاری، مصاحبه‌های مکتوب و مشاهده‌های کلاس درس و یادداشت‌های میدانی نویسنده اول، جمع‌آوری شد. در فرایند کاهش نظام‌وار داده‌ها و تجزیه و تحلیل نهایی، دو مقوله اصلی شکل گرفت که هرکدام، شامل چندزیرمقوله شدند. مقوله اول «چگونگی استفاده از ریاضی پیشرفته دانشگاهی توسط معلمان در تدریس مدرسه‌ای» و مقوله دوم «شکاف بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی» بود. توصیه این پژوهش این است که دانشجو- معلمان ریاضی، به درس‌های محتوایی ویژه‌ای نیاز دارند که بین ریاضی مدرسه‌ای ریاضی دانشگاهی، ارتباط برقرار کند؛ همان ریاضیاتی که هدف این پژوهش، شناسایی ماهیت و توصیف آن بود.

کلیدواژه‌ها: ریاضی دانشگاهی، ریاضی مدرسه‌ای، دانش محتواییِ تخصصی‌شدهٔ ریاضی مدرسه‌ای، دبیران ریاضی دبیرستان.

Z. Gooya (Ph.D)

Abstract: In recent years, a new construct called "School- Related Content Knowledge" has been introduced to the field to make connection between university mathematics and school mathematics. To better understand the relation between university and school mathematics, a study was designed and conducted with 19 upper secondary mathematics teachers, using qualitative methodology. The data collected from four different sources. By systematic reduction of the data, two categories emerged with of a number of sub-categories as "the ways in which, teachers use academic mathematics in their high school teaching" and "the gap between academic vs. high school mathematics" The study concluded that it is important to design specific mathematics courses that are content-based, different from both mathematics and all kinds of pedagogical courses that their main responsibility is to help prospective high school teachers to re-tailoring academic mathematics to better serve the purpose of high school mathematics.

Key words: University Mathematics, School Mathematics, High School Teachers, School- Related Content Knowledge.

---

۱. این مقاله برگرفته از رساله دوره دکتری آموزش ریاضی نویسنده اول مقاله در دانشگاه شهید چمران اهواز با عنوان «دانش مورد نیاز معلمان ریاضی برای تدریس در دوره دبیرستان با تأکید بر حسابان» است.

۲. دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران h-sereshti@phdstu.scu.ac.ir

۳ . استاد تمام دانشگاه شهید بهشتی، گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی z.gooya@sbu.ac.ir

مقدمه

جایگاه دانش محتوایی معلمان ریاضی در ارتقای یادگیری دانش‌آموزان، چند دهه است که توجه پژوهشگرانِ آموزش معلمان ریاضی را به خود، جلب کرده است. این دانش و نقشی که در شکل دادن به تدریس کلاسی بازی می‌کند، توسط پژوهشگران بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است (شولمن[1]، ۱۹۸۶؛ بال[2]، ۲۰۰۰؛ بال و بس[3]، ۲۰۰۳؛ رولند و تارنر[4]، ۲۰۱۰؛ استایلینایدز و استایلینایدز[5]، ۲۰۱۰؛ ، ۲۰۱۵؛ گویا و مهربانی، ۱۳۹۳؛ زازکیس[6] و لیکین[7]، ۲۰۱۰). اکثر این پژوهش‌ها، با استفاده از دیدگاه شناختی انجام شده‌اند و در آنها، دانش موضوعی به عنوان یکی از چندین عامل اثرگذار در طراحی‌های معلمان برای تدریس و تحقق اهداف آموزشی خود، دیده می‌شود (اسپیر و همکاران[8]، ۲۰۱۵). در همین راستا، هیل و همکاران[9] (۲۰۰۵) با تأکید بر اهمیت دانش محتوایی ریاضی در ارتقای کیفیت تدریس معلمان، ایجاد ارتباط بین میزان این دانش و عملکرد دانش‌آموزان را چالشی بزرگ دانستند. با این وجود، یافته‌های این پژوهش‌ها نتوانسته‌اند نقش مؤثری بر شکل‌گیری و جهت‌دهیِ درس-های ریاضی که در دانشگاه، برای دانشجو- معلمان رشته ریاضی در دوره متوسطه تدوین شده، داشته باشند. گزارش سال ۲۰۱۲ «شورای سیاست‌گذاری کنفرانس‌های علوم ریاضی[10]» در همین راستا بیان نمود که اکثر معلمان ریاضی دبیرستان دارای مدرک تحصیلی در رشته ریاضی هستند و اگرچه، بسیاری از درس‌های محتوایی ریاضی که در دانشگاه می‌گذرانند، مورد نیازِ دوره‌های تحصیلی بالاتر (کارشناسی ارشد دکتری)، صنعت و کسب‌وکار است، ولی جای درس‌های ریاضی که تمرکز آنها بر تدریس ریاضی مدرسه‌ای باشد، تقریباً خالی است. در صورتی که به باور این شورا، دانشجویان ریاضی، به درس‌هایی نیاز دارند که برایشان فرصت-هایی برای ورود به حرفه معلمیِ ریاضی و تدریس فراهم کند یا علاقه ورود به حرفه معلمی را

1. Shulman
2. Ball
3. Bass
4. Turner
5. Stylinadis
6. Zazkis
7. Leikin
8. Speer, King & Howell
9. Hill, Rowan & Ball
10 Conference Board Of The Mathematical Science: CBMS

در آنها ایجاد کند. البته در دوره‌هایی که گرایش آنها تربیت معلم دبیرستانی است، این ضرورت بیشتر است، زیرا لازم است دانشجویان این گرایش طوری آموزش ببینند که قادر به یادگیری مداوم محتوای جدید ریاضی از طریق خودآموزی باشند و درک و فهم خود را از مباحثِ آشنا و خوانده شده، ارتقا دهند و به آن عمق ببخشند. این در حالی است که اسپیر و همکاران (۲۰۱۵، به نقل از فلودن و منیکتی، ۲۰۰۵)، بحث کرده‌اند که گذراندن درس‌های ریاضیِ دانشگاهی به شکل مرسوم، الزاماً خبرگی در مفاهیم برنامه درسی مدرسه‌ای ایجاد نمی‌کند. قبل از این نیز پژوهش لی‌پینگ ما[1] (۱۹۹۹) نشان داد که معلمان ریاضی، نیاز دارند تا درکی غنی از مفاهیم ریاضی داشته باشند، ولی بسیاری از دانشجو- معلمان رشته ریاضی پس از فراغت از تحصیل و ورود به حرفه معلمی، فهم عمیقی از محتوای ریاضیِ برنامه درسی دوره دبیرستان ندارند. بدین سبب در دهه اخیر، مطالعه در مورد چگونگیِ دوباره‌نگری در دانش محتوایی معلمان ریاضی در برنامه درسی دانشگاهی با استناد به یافته‌های پژوهشی، یکی از تمرکزهای تحقیقی در حوزه آموزش معلمان ریاضی به‌خصوص در دوره متوسطه شده است. به دلیل این نیاز، پژوهشی طراحی و اجرا شد که تمرکز آن، بر توصیف چگونگیِ ارتباط بین دانش محتوایی ریاضیِ دانشگاهی و دانشِ تدریسی معلمان ریاضیِ دوره متوسطه بود. در نتیجه هدف پژوهش این بود که محتوای ریاضی مناسب را برای تدریس در دوره کارشناسی ریاضی که هدفش تربیت معلمان ریاضی بود، شناسایی و توصیف کند و به این سؤال اصلی پژوهش پاسخ دهد که «چگونه معلمان ریاضی، از محتوای ریاضی که در دانشگاه یاد گرفته‌اند، در تدریس خود استفاده می‌کنند؟»

پیشینه پژوهش

دانش محتوایی ریاضی مورد نیاز و مناسب برای تدریس در دبیرستان، یکی از مسائلی بود که کلاین[2] در اوائل قرن بیستم، به آن توجه ویژه نمود و «کتاب ریاضی مقدماتی از دیدگاه بالاتر[3]»

1. Liping Ma

علت آوردن نام نویسنده در متن این است که نویسندگان دغدغه داشتند که نام خانوادگی «ما»، با ضمیر «ما» در زبان فارسی، اشتباه گرفته نشود.

2. Felix Klein
3. Elementary Mathematics From A Higher (Advanced) Standpoint

را برای معلمان ریاضی نوشت. این کتاب از قرن گذشته تا کنون، مدلی برای تدریس ریاضی در دوره کارشناسی به‌خصوص برای دانشجو- معلمان بوده است (ویگند و همکاران[1]، ۲۰۱۷). در راستای تحقّق خواسته کلاین بر انتخاب محتوای اصیل، از نظر ریاضی دقیق و متناسب برای تدریس در دبیرستان، «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی[2]»، پروژه‌ای را با نام وی تعریف کرده که هدف آن، نوشتن محتوای مناسب برای دبیران ریاضی به دو زبان انگلیسی و بومیِ نویسنده است و برای علاقه‌مندان، قابل دسترسی است[3].

درِهر و همکاران[4] (۲۰۱۸، به نقل از فلچر[5]، ۱۹۷۵) اظهار داشتند که معلم ریاضی، علاوه بر دانش عمومیِ ریاضی که به او تواناییِ موضوعی می‌دهد و برایش امکان برقراری ارتباط را با سایر ریاضی‌دانان ایجاد می‌کند، به دانشی ویژه برای موفقیت در حرفه خود نیاز دارد. به گفته آنان، ماهیت دانشی که معلم را در تدریس ریاضی خود موفق کند و می‌توان آن را «دانش حرفه‌ای معلمی» نامید، شبیه دانشی است که یک مهندس یا ستاره‌شناس در کار حرفه‌ای خود، از آن استفاده می‌کند. با این حال، یافته‌های پژوهش آنان معلوم کرد که دانش ریاضیِ مخصوص معلمان ریاضی، به طور مناسبی تبیین نشده و به اندازه کافی، قدر دانسته نشده است و این امر، یکی از معضلات آموزش معلمان ریاضی است.

این موضوع، در ادامه بحث‌های مربوط به انواع دانشی است که معلمان ریاضی برای تدریس بهتر به آنها نیاز دارند و توجه محققان را به سوی سایر انواع دانش محتوایی و ابزارهای اصلاح شده‌تری برای اندازه‌گیری این دانش هدایت کرده است و در نتیجه آنها، دسته‌بندی‌های متنوعی برای تعیین شکل‌های دیگری از دانشِ مرتبط با تدریس مباحث خاص در ریاضی، صورت گرفته است. چارچوب «دانش ریاضی **در** تدریس[6]» (بال و همکاران[7]،

این کتاب یادداشت‌های کلاسی فلیکس کلاین برای دانشجو- معلمان ریاضی است که که درسه جلد بین سال‌های ۱۹۰۲ تا ۱۹۰۸ منتشر شد.

1. Weigand, Mccallum, Menghini, Neubrand, Schubring & Tobies: Weigand Et Al
2. International Commission On Mathematical Instruction: ICMI
3. Www.Mathunion.Org
4. Dreher, Lindmeier, Heinze & Niemand
5. Fletcher
6. Mathematics Knowledge For Teaching: MKT
7. Ball, Thames & Phelps

۲۰۰۸)، چارچوب «دانش ریاضی برای تدریس[۱]» (فینما و فرانک[۲]، ۱۹۹۲) و «دانش چهارگانه[۳]» (تارنر و رولند،۲۰۱۱)، سه دسته‌بندی معروف در این زمینه هستند. چارچوب فینما و فرانک، چهار مؤلفه «دانش ریاضی[۴]»، «دانش بازنمایی‌های ریاضی[۵]»، «دانشِ دانش‌آموزان[۶]» و «دانشِ تدریس و تصمیم‌گیری[۷]» را به‌عنوان دانش‌های مورد نیاز معلمان در تدریس ریاضی در نظر می‌گیرد که دو مورد اول، مربوط به دانش محتوایی ریاضی است. با این حال، اسپیر و همکاران (۲۰۱۵) ابراز کرده‌اند که چارچوب «دانش ریاضی برای تدریس[۸]» که توسط بال و همکاران (۲۰۰۸) تدوین شده و در ایالات متحده مورد توجه قرار گرفته است، در سطح جهانی هم تأثیرگذار بوده و بعضی از محققان حوزه آموزش معلمان ریاضی، از آن به عنوان مبنایی برای مقایسه و اعتباربخشی چارچوب‌های تبیین‌شده خود، استفاده کرده‌اند که پروژه «آموزش معلم و توسعه دانش‌آموز در ریاضی»[۹] یا پروژه «دانش جبر برای تدریس[۱۰] » که توسط مک‌کروری و همکاران[۱۱] (۲۰۱۲) تبیین شد، از آن جمله‌اند. همچنین، چارچوب «چهارگانه» تارنر و رولند (۲۰۱۰)، همسویی زیادی با چارچوب بال و همکاران دارد و به نوعی، نسخه جرح و تعدیل شده آن در انگلستان است و تنها اندکی تفاوت رویکردی با هم دارند. در توسعه و اصلاح این دو چارچوب، مؤلفه‌های «دانش محتوایی عمومی[۱۲]» و «دانش تخصصی‌شده محتوایی[۱۳]» هم در نظر گرفته شد که منشأ آن، یافته‌های حاصل از پژوهش‌های انجام شده در رابطه با تدریس ریاضی توسط معلمان دوره ابتدایی بوده است. این در حالی است که از نظر اسپیر و همکاران (۲۰۱۵)، استفاده از این چارچوب در پژوهش‌های مربوط به دانش ریاضی مورد نیاز معلمان دوره دبیرستان و بالاتر، با مشکلاتی روبروست. بنا به اظهار آنها، معلم دوره ابتدایی نسبت به معلم دوره متوسطه، مراحل آماده‌سازی کاملاً متفاوتی را طی می‌کند، زیرا اولی معلم عمومی

1. Mathematics Knowledge In Teaching: Mkit
2. Fennema & Frank
3. Knowledge Quartet
4. Knowledge Of Mathematics
5. Knowledge Of Mathematical Representations
6. Knowledge Of Students
7. Knowledge Of Teaching And Decision Making
8. Mathematical Knowledge For Teaching
9. The Teacher Education And Development Student In Mathematics (TEDS-M)
10. Knowledge Of Algebra For Teaching: KAT
11. Mccrory, Floden, Reckase & Senk
12. Common Content Knowledge: CCK
13. Specialized Content Knowledge: SCK

است که ریاضی هم تدریس می‌کند و به این دلیل، تمرکز آموزش‌های پیش‌ازخدمتش بر «دانش عمومی محتوایی» است که ریاضی را هم شامل می‌شود. در صورتی که دومی، برای تدریس ریاضی آموزش می‌بیند و تأکید آموزش‌هایش بر «دانشِ تخصصی‌شدهٔ محتوایی» است که در ضمن آن، به دانش محتوایی عمومی نیز توجه می‌شود. در مورد دوم، رابطه بین این دو نوع دانش برای معلمی که مدرک کارشناسی یا بالاتر در رشته ریاضی دارد، نامشخص است. در تعریف بال (۲۰۰۰)، نوع دانش ریاضی در «دانش عمومی محتوایی»، ریاضیاتی است که توسط یک شهروند معمولی و متوسط از نظر دانش ریاضی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. از نظر بال (۲۰۰۰)، برای افرادی که مدرک تحصیلی دانشگاهی آنها «ریاضی» است و در دوره دبیرستان و بعد از آن تدریس می‌کنند، تعیین این که در آموزش «دانش محتوایی عمومی» چه چیزی لازم است در نظر گرفته شود، موضوع مورد مطالعه پژوهشگران آموزش معلمان ریاضی است. در ارتباط بین این دو مبحث، اسپیر و همکاران (۲۰۱۵) سؤال کرده‌اند که آیا درک «دانش محتوایی عمومی» برای کسانی که مدرک کارشناسی یا بالاتر در رشته ریاضی دارند، مانند «دانش محتوایی تخصصی شده» ریاضی است یا با آن متفاوت است؛ سؤالی که تلاش برای پاسخ دادن به آن، چالشی اساسی برای پژوهشگران این حوزه ایجاد کرده است.

ریاضی مدرسه‌ای- ریاضی دانشگاهی و ارتباط بین آنها

یکی دیگر از اشکال‌هایی که به مدل‌های دسته‌بندی دانش محتوایی ریاضی معلمان گرفته شده، در نظر نگرفتن تفاوت‌های ریاضیِ مدرسه‌ای و ریاضیِ دانشگاهی است. مشخص‌ترین نمونه آن است که در شروع قرن بیستم، کلاین (۱۹۰۸، نقل شده در درِهر و همکاران، ۲۰۱۸)، تأکید کرد که ریاضی مدرسه‌ای با ریاضیاتی که در دانشگاه تدریس می‌شود، متفاوت است و آن تفاوت را فراتر از محتوای تدریس‌شده معرفی کرد. از نظر کلاین، مشخصه اصلی ریاضیِ مدرسه‌ای، شهودی و عمومی[1] بودن آن است؛ به این معنی که ساختارهای ریاضی، به تدریج و بر پایه اشیای عینیِ برپا شده که در تقابل با روش نظام‌مند و منطقیِ مرسوم در آموزش عالی است (کلاین، ۱۹۰۸، نقل شده در درهر و همکاران، ۲۰۱۸). به طور مثال، اگرچه در حال حاضر حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها در ریاضی به نوعی در برنامه ریاضی دوره دوم متوسطه وارد

1. Generic

شده است، اما در این ورود، تفاوت بین ریاضی مدرسه‌ای و دانشگاهی به قوت خود باقی است (درهر و همکاران، ۲۰۱۸). در این خصوص، مثالی که وو[1] (۲۰۱۱) از کسرها به‌عنوان یکی از مباحث مهم ریاضی دوره ابتدایی مطرح کرد، قابل درنگ است. به گفته وی، معمولاً اعداد گویا در دانشگاه، به عنوان مجموعه‌ای از کلاس‌های هم ارزیِ زوج‌های‌مرتب اعداد صحیح تعریف می‌شوند و عمل جمع و عمل ضرب در این مجموعه، طوری تعریف می‌شوند که در اصول موضوع حلقه‌ها، صدق کنند و به طور معمول، سازگاریِ این تعریف‌ها با رابطه هم‌ارزی بررسی می‌شود. بنابراین، اعداد گویا در یک روش استنتاجی اصل موضوعی معرفی می‌شوند که نمونه‌ای از چگونگی تدریس ریاضی دانشگاهی است. این مقدمه با تجرید سطح بالا و زبان ریاضی نمادین مشخص می‌شود که کلاین آن را روش «نظام‌مند و مرسوم منطقی» در ریاضی دانشگاهی می‌نامید. اما معمولاً تدریس کسرها در آموزش مدرسه‌ای، به جای تعریف و به‌عنوان نشان‌دادن بخشی از کل، در یک زمینه[2] و با استفاده از اشیای عینی و آشنا شبیه پیتزا یا شکلات، صورت می‌گیرد، به این معنا که «کل» تعریف نمی‌شود، و از پیتزا یا شکلات، به عنوان نمونه‌ای از «کل»، ارجاع داده می‌شود. همچنین، روش ارائه شده برای جمع و ضرب کسرها در مدرسه، با روش‌هایی که در درس‌های ریاضی دانشگاهی ارائه می‌شود و درستی آنها با روش‌های اثباتی دقیق نشان داده می‌شود، تفاوت اساسی دارد. البته این کافی نیست که دانش‌آموزان یک کسر را، تنها به عنوان بخشی از کل تفسیر کنند، بلکه لازم است که هم‌زمان، کسر را با چیزهای دیگری نظیر یک «عملگر» یا «نسبت» هم درک کنند؛ درکی که بیشتر مبتنی بر شهود است و همراه با استدلال‌های کلاسیک ریاضی نیست. وو (۲۰۱۱) برای نمونه، توضیح می‌دهد وقتی به دانش‌آموز گفته می‌شود که ۳/۴، همان سه تقسیم بر ۴ است، با درک وی از تقسیم هماهنگ نیست. در حالی که در ریاضیاتی که در دانشگاه تدریس می‌شود، تعریف‌های مناسبی از «جزیی از کل» و «m/n برای m و n دلخواه و $n \neq 0$ » ارائه شده و اثبات می‌شود که « $m \div n = \frac{m}{n}$ ». این موضوع نشان می‌دهد نوع ریاضیاتی که در دانشگاه تدریس می‌شود، بر حسب دقت و ضرورتی که برای توجیه موضوع لازم است، با ریاضی

1. Wu
2. Context

مدرسه‌ای متفاوت است. قبل از این نیز برِوم[1] (۱۹۹۴) بحث کرده بود که محتوای ریاضیاتی که در مدرسه یاد گرفته می‌شود، ساده‌سازی ریاضی دانشگاهی نیست، بلکه موضوع‌های مدرسه‌ای، منطق ویژه خودشان را دارند.

وو (۲۰۱۱) در تشریح این تفاوت، بیان کرد که ریاضی به عنوان یک رشته علمی که در دانشگاه تدریس می‌شود، دارای ساختار اصل موضوعی- استنتاجی است و روی برقراری دقیق نظریه‌ها بر اساس «تعریف‌ها، قضیه‌ها و اثبات‌ها» تمرکز دارد. ریاضی دانشگاهی، معمولاً با اشیایی سروکار دارد که محدود به واقعیت نیستند و اغلب با سطح بالایی از تجرید و زبان ریاضیِ نمادین، مشخص می‌شوند. ریاضی به عنوان یک حوزه معرفتی/ دیسیپلین، همیشه در یک روش اصل موضوعی- استنتاجی کار نمی‌کند که مثالِ کسر و معرفی شهودیِ آن بدون استفاده از ساختار اصل موضوعی، یک نمونه معرّف[2] است. علاوه بر این، فرایند شکل‌گیریِ اغلب مفاهیم جدید در ریاضی، به روش استنتاجی اتفاق نمی‌افتد. با این وجود، هنگامی که نتایج تحقیقات در مجلات پژوهشی یا کتاب‌های ریاضی منتشر می‌شوند و هنگامی که ریاضی به دانشجویان تدریس می‌شود، معمولاً به روش استنتاجی- اصل موضوعی انجام می‌شود. چیزی که دانشجویان، معلمان ریاضی و ریاضی‌دانان آینده در طول مطالعات دانشگاهی خود، با آن مواجه می‌شوند و «ریاضی دانشگاهی» نامیده می‌شود. در صورتی که تمرکز عمده «ریاضی مدرسه‌ای»، بر کاربرد ریاضی به عنوان ابزاری برای توصیف و درک واقعیت و تسهیل زندگی روزانه است. در نتیجه در کلاس‌های ریاضی مدرسه‌ای، اشیای ریاضی بیشتر به شکلی شهودی و کاربردی و محدود به زمینه‌های خاص، معرفی می‌شوند. بدین سبب تشکیل مفهوم‌ها در ریاضیِ مدرسه‌ای، معمولاً به صورت استقرای تجربی و به وسیله مثال‌های ساده و ملموس انجام می‌شود و به جای اثبات‌های دقیق، تمرکز بر استدلال‌های شهودی و مرتبط با زمینه است (دِرهر و همکاران، ۲۰۱۸).

دانش محتواییِ تخصصی‌شدهٔ ریاضیِ مدرسه‌ای

با توجه به تفاوت بین ریاضی دانشگاهی و ریاضی مدرسه‌ای، ضرورت ایجاد دانش خاصی برای معلمان ریاضی که رشته تخصصی دانشگاهی آنها ریاضی است، مطرح شده است تا

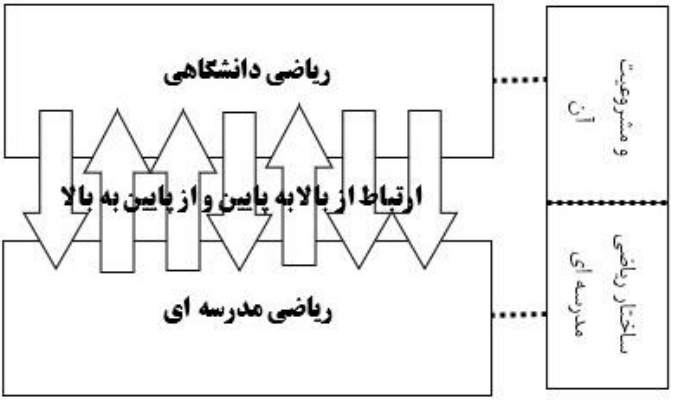
1. Bromme
2. Representative

بتوانند تدریس ریاضی موفقی در دبیرستان داشته باشند؛ دانشی که نوع خاصی از «دانش محتوایی[1]» است که ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی را به هم مرتبط می‌کند. درِهر و همکاران (۲۰۱۸)، این نوع «دانش محتوایی» ویژه را «دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه[2]» نامیده‌اند. به گفته آنها، این دانش، نوع خاصی از دانش محتوایی برای تدریس ریاضیِ دبیرستانی است، مفهومی در مورد روابط درونی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی است و شامل مفاهیمیِ از ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی و روابط بین آنهاست. این دانش، فراتر از ریاضی مدرسه‌ای است و تمایز آن با «دانش محتوایی دانشگاهی» و «دانش محتواییِ پداگوژیکی[3]» روشن است. دانش محتوایی ریاضی که بین دانشجویانِ تمام گرایش-های ریاضی- دبیری/ آموزش ریاضی و پژوهشی مشترک است، در مقایسه با «دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه» و «دانش محتوایی پداگوژیکی»، ماهیت محتوایی دارد که با دانشِ پداگوژیکی ترکیب نشده است.

سه مؤلفه دانش محتواییِ ریاضیِ مرتبط با مدرسه

«دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه» شامل سه مؤلفه «دانش در مورد ساختار برنامه درسی و مشروعیت آن مطابق دلایل «(فرا)ریاضی[4]»، «دانش در مورد روابط درونی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی در جهت از بالا به پایین[5]» و «دانش در مورد روابط درونی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی در جهت از پایین به بالا[6]» است. مدل شکل (۱)، مفهوم‌سازی این سه مؤلفه و رابطه آنها را با «دانش محتوایی» ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی به طور نظام‌مند، نشان می‌دهد.

1. Content Knowledge: CK
2. School- Related Content Knowledge: SRCK
3. Pedagogical Content Knowledge: PCK
4. (Meta)Mathematics
5. Top- Down
6. Bottom- Up



شکل ۱ مفهوم‌سازی دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه(دِرهِر و همکاران، ۲۰۱۸)

مؤلفه اول: در مورد ساختار برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای و مشروعیت آن است و بیشتر به سؤال‌های مطرح‌شده در حوزه برنامه درسی ریاضی می‌پردازد. یک سؤال مهم که تدوین-کنندگان برنامه درسی ریاضیِ مدرسه‌ای موظف به پاسخ‌دادن به آن هستند، مربوط به ایده‌های پایه‌ای ریاضی، اهمیت موضوع‌های خاص در ارتباط با آنها و دلایل ریاضی یا فراریاضیِ انتخاب آنها برای ریاضی مدرسه‌ای است. مثلاً برای پاسخ‌گویی به سؤال‌هایی از قبیل این که «چرا مبحث تابع، نقش برجسته‌ای در ریاضی مدرسه‌ای دارد؟» یا «چرا کسرها در مدرسه تدریس می‌شوند؟»، به دانشی از جنس «دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه» نیاز است. این دانش کمک می‌کند که برنامه‌ریز و معلم ریاضی بداند که کدام ایده‌های ریاضی هستند که به-وسیله آنها، می‌توان یک مفهوم ریاضی را به یک دانش‌آموز در پایه‌ای خاص، توضیح داد و پیش‌نیازهای آن را در پایه‌های پایین‌تر، مشخص نمود. به طور نمونه، اگرچه عدد π یا تقریبی از آن، در دوره ابتدایی و در مبحث تناسب (π به‌عنوان نسبت محیط دایره به قطر آن) معرفی می‌شود، ولی به این بحث پرداخته نمی‌شود که عدد π یک نسبت است و برای همه دایره‌ها، یکسان است، زیرا مباحث ریاضی که پیش‌نیاز این بحث است، هنوز تدریس نشده است. افزون بر این، معلوم کردن این که در هر پایه تحصیلی، کدام مفاهیم و ایده‌های ریاضی لازم است که معرفی شوند و چرا آن پایه برای این کار، مناسب است، به چنین دانشی نیازمند

است. همچنین، بحث راجع به سلسله‌مراتب مفاهیم ریاضی و تعیین پیش‌نیازهای ضروری برای شکل‌گیری هر مفهوم ریاضی، دانش ویژه‌ای می‌طلبد. مثال ملموس دیگر که مربوط به اعداد حقیقی است، این است که بررسی شود که در هر پایه تحصیلی، بر چه جنبه‌هایی از اعداد حقیقی تمرکز شود، کدام درس‌های ریاضی، بستر غنی‌تری برای توسعه اعداد حقیقی فراهم می‌کنند، چگونه طی پایه‌ها و درس‌های مختلف، اعداد حقیقی توسعه پیدا کند، انتظار برنامه درسی ریاضی از فهم و درک اعداد حقیقی توسط دانش‌آموزانِ رشته ریاضی- فیزیک در پایان دوره دوم متوسطه، چیست؟ در تبیین اعداد حقیقی تا پایان دبیرستان، چه اندازه به مهارت‌های محاسباتی و چه اندازه به مهارت‌های اثباتی توجه شود؟ مهارت‌های مورد نیاز برای دانش‌آموزان در این مورد کدامند؟ سطح انتظار دانشگاه از فهم و درک اعداد حقیقی توسط ورودی‌ها به رشته‌های ریاضی و مهندسی و علوم پایه چقدر است؟ برای درس‌های آنالیز دانشگاهی، پرداختن به کدام جنبه‌های اعداد حقیقی، در اولویت هستند؟

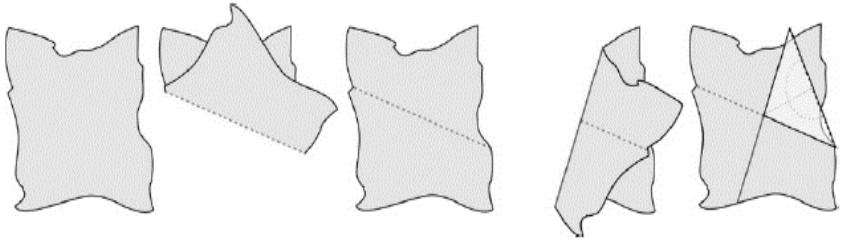
مؤلفه دوم: درباره روابط درونی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی و چگونگیِ ایجاد پیوند بین این دو نوع ریاضی در جهت بالا به پایین است. جهتِ از بالا به پایین به این معناست که برای تبدیل ریاضی دانشگاهی به ریاضی مدرسه‌ای، دانشجو- معلمان نیازمند نوع خاصی از دانش ریاضی هستند تا بتوانند از عهده پاسخ‌گویی به سؤال‌های مهمی در مورد چگونگیِ تبدیل یک ایده ریاضی دانشگاهی به یک مفهوم ریاضی مدرسه‌ای برآیند. برای این کار، لازم است که آنان، آموزش ببینند که چه روندی برای این تبدیل و مناسب‌سازی، طی شود و در این جریان، چه تعریف‌ها، رویّه‌ها، اثبات‌ها، مثال‌ها و نظایر آن، برای حفظ یکپارچگیِ یک مبحث ریاضی، بایستی حفظ شود. برای مثال، این سؤال در درس حسابان دبیرستان مهم است که میدان اعداد حقیقی، به کدام روش از طریق میدان اعداد گویا ساخته می‌شود[1] و کدام روشِ ساختن، امکان بیشتری را برای ساده‌کردن این مبحث و ارائه مناسب‌تر آن در ریاضی مدرسه‌ای ایجاد می‌کند. علاوه بر این، اعداد گنگ از جمله مباحثی است که قبل از ارائه رسمی آن در دوره متوسطه دوم، دانش‌آموزان ابتدا در پایه‌های پایین‌تر، با مفهوم آن آشنا می‌شوند و یک سؤال مهم، تعیین پایه مناسب و نحوه معرفی رسمی‌تر آن در این دوره است. از این

۱. اعداد حقیقی از اعداد گویا و به وسیله بستار توپولوژیکی، دنباله‌های بنیادی کُشی، بازه‌های تودرتو و برش‌های دِدِکیند ساخته می‌شود.

گذشته، روش بازکردن مفهوم‌های ریاضی در دبیرستان شامل بازنمایی‌ها و فرآیندهایی است که بتواند باعث «پرده‌برداری» از آنها شود (غلام‌آزاد، ۱۳۹۴) و این کار، تنها با دانستن ریاضیات دانشگاهی، شدنی نیست که برای نمونه، می‌توان به مفهوم «تابع» و «تمامیت[1]» اشاره نمود؛ دو مفهومی که یکپارچه شدن آنها برای دانش‌آموزان، به سادگی اتفاق نمی‌افتد. بالاخره، انتخاب مسائل مناسبی که یادگیرنده بتواند از طریق درگیرشدن با فرایند حل آنها، به کشف قطعی‌تر[2] یک ایده مهم ریاضی دبیرستانی مانند «چگال بودن اعداد گویا» یا مفهوم «بینهایت» برسد و بینش وسیع‌تری نسبت به آن پیدا کند.

مؤلفه سوم: به روابط درونی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی در جهت پایین به بالا می‌پردازد، به این معنا که برخلاف مؤلفه دوم، جهت حرکت از دانش‌آموز به معلم و برنامه درسی است. برای مثال، وقتی مبحثی در کلاس مطرح می‌شود، نوع بازتاب دانش‌آموزان بر ایده‌های ریاضیِ ارائه شده در آن مبحث، به معلمان کمک می‌کند تا با حفظ یکپارچگی، به جرح و تعدیل آن بپردازند. یک نمونه از مبحث‌های ریاضی مدرسه‌ای، ارائه عمود بودن دو خط، با دو بار تا زدن کاغذ به روش زیر است(شکل ۲):

- یک تکه کاغذ بردارید و یک بار تا بزنید.
- مرتبه دوم کاغذ را طوری تا بزنید که خطِ تایِ اولی، روی خودش قرار بگیرد.
- حالا اگر تکه کاغذ را باز کنید می‌توانید ببینید که دو خط تا بر هم عمودند.



شکل ۲ مثال مربوط به مؤلفه پایین به بالا مدل دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه

1. Completeness
2. Certain

سؤال این است که کدام یک از تعریف‌های زیر از عمودبودن، بر پایه روش تا زدن کاغذ به روش بالا، بنا شده‌اند؟

الف) دو خط g و h عمود نامیده می‌شوند، اگر همدیگر را قطع کرده و هر چهار زاویه به‌وجود آمده، همنهشت باشند.

ب) دو خط g و h عمود نامیده می‌شوند، اگر $g \neq h$ و یک بازتاب نسبت به h، g را به خودش تبدیل کند.

پ دو خط g و h عمود نامیده می‌شوند، اگر h نیمساز زاویه نیم‌صفحه باشد که توسط خط g به‌وجود می‌آید.

ت دو خط g و h عمود نامیده می‌شوند، اگر $g \neq h$ و یک دَوَران ۹۰ درجه وجود داشته باشد که g را به h و h را به g تصویر کند.

نمونه دیگر، استدلال‌ها و اثبات‌هایی است که دانش‌آموزان به طور ضمنی یا صریح، می‌سازند و الزاماً، دقت مورد نظر ریاضی را ندارند. به طور مثال، تنوع استدلال‌های دانش‌آموزان برای پیداکردن حد $0.\overline{9}$ برای معلمان قابل ملاحظه است، به‌خصوص آن که $0.\overline{9}$ اغلب به‌عنوان فرآیند معرفی می‌شود، در صورتی که $0.\overline{9}$ می‌تواند به‌عنوان عددی که بر پایه یک «فرآیندِ حدی» قرار دارد، در نظر گرفته شود.

جمع‌بندی پیشینه

از نظر درهر و همکاران (۲۰۱۸)، ممکن است تمایز بین «دانش محتوایی عمومی» و «دانش محتوایی تخصصی‌شده» به‌گونه‌ای که توسط بال و همکاران (۲۰۰۸) تبیین شده، در رابطه با تدریس ریاضی دوره متوسطه خیلی مفید نباشد، در صورتی که تمایز بین «ریاضی مدرسه‌ای» و «ریاضی دانشگاهی»، ضروری است. به باور آنها، «دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه»، از «دانش محتوایی عمومی» و «دانش محتوایی تخصصی» که توسط گروه دانشگاه میشیگان (بال و همکاران، ۲۰۰۸) معرفی شد، برای مشخص کردن ریاضیِ ویژه برای دانشجو- معلمان ریاضی که برای تدریس در دبیرستان آماده می‌شوند، مناسب‌تر است. به باور آنها، گروه دانشگاه میشیگان، ضمن توجه به جهت حرکت پایین به بالا برای مشخص کردن دانش ریاضی محتوایی مورد نیاز برای تدریس، از ضرورت جهت حرکت بالا به پایین، غفلت کرده‌اند. بنابراین، هدف این پژوهش، توصیف عمیق‌تر و با جزییات بیشترِ ماهیت، ضرورت و نقش

«دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه» از دیدگاه معلمان ریاضیِ شاغل بـه تـدریس در دوره دوم متوسطه و به طور خاص، در تدریس درس حسابان بود.

روش‌شناسی پژوهش

با توجه به ماهیت و هدف این پژوهش که در پی شناسایی و توصیف «دانش محتوایی ریاضـی مرتبط با مدرسه» بر اساس پیشینه پژوهشی و رسیدن به یک صورت‌بندی نظری بود، از «نظریهٔ برآمده از داده‌ها» در پارادایم کیفی استفاده شد تا بنیان نظری پژوهش از دل داده‌هـای واقعـی و توصیف آن داده‌ها، به تدریج شکل گیرد و ظاهر شـود کـه ایـن رویکـرد بـه داده‌هـا و نظریـه، ویژگی اصلی این روش است. همچنین، برای اطمینان از اعتبار داده‌ها و تأیید یافته‌هـا، از روش مثلثی‌سازی (همسوسازی) استفاده شد.

شرکت‌کنندگان

شرکت‌کنندگان در این مطالعه، ۱۹ معلم ریاضیِ دورهٔ متوسطه بودنـد کـه همگـی، بـه صـورت داوطلب وقت خود را در اختیار پژوهشگر گذاشتند. به شرکت‌کننـدگان اطمینـان داده شـد کـه برای حفظ محرمیت آنان، در ارجاع به نظرها و نقل‌قول‌های ایشان، از نام‌های مستعار یا بـدون نام استفاده خواهد شد. در بین شرکت‌کنندگان، شش نفر دارای مـدرک کارشناسـی ریاضـی بـا گرایش دبیری و هشت نفر دارای مـدرک کارشناسـی آمـوزش ریاضـی از دانشـگاه فرهنگیـان بودند. همچنین، گرایش پنج نفر در دوره کارشناسی ریاضی، محض یا کاربردی بود که از ایـن عده، هشت نفر دارای مدرک کارشناسی ارشد در رشته ریاضی یا آموزش ریاضی بودند. سابقه تدریس ریاضیِ شرکت‌کنندگان در دبیرستان، بین دو تا ۲۵ سال بود کـه موقـع انجـام مطالعـه، همگی در دوره متوسطه دوم تدریس می‌کردند، ولـی بعضـی از آنهـا، سـابقه تـدریس در دوره متوسه اول هم داشتند. تعداد اندکی از این افراد که گرایش دبیری یا آمـوزش ریاضـی نبودنـد، بعد به استخدام آموزش‌وپرورش درآمده بودند. از این افراد، سابقهٔ تدریس دو نفر کمتر از پـنج سال[1]، هشت نفر بین پنج تا ۱۵ سال و نُه نفر بین ۱۵ تا ۲۵ سال بود.

---

۱. علت کمتر از پنج سال سابقه تدریس این دو نفر این بود که در حال حاضر، معلمان دوره متوسطه اول و متوسـطه دوم، بـا مدرک تحصیلی یکسان جذب می‌شوند و اداره‌های آموزش‌وپرورش، معمولاً معلمان تازه فارغ‌التحصیل دانشگاه فرهنگیان را به دوره متوسطه اول ارجاع می‌دهند.

با توجه به موضوع پژوهش، شرط انتخاب معلمان برای مصاحبه این بود که تجربه تدریس حسابان را داشته یا مشغول به تدریس آن باشند. بدین سبب، همه شرکت‌کنندگان سابقه تدریس حسابان۱ را داشتند و اکثرشان، در حال تدریس آن بودند. شش نفر نیز در حال تدریس حسابان۲ بودند. همچنین، تمام درس‌های ریاضی دو دوره اول و دوم متوسطه توسط ۱۹ شرکت‌کننده، تدریس شده بود (پیوست پ.)

فرایند انتخاب شرکت‌کنندگان

نحوه مشارکت معلمان در این پژوهش بدین‌گونه بود که ابتدا نویسنده اول، از چند معلم ریاضی که در محیط مدرسه با آنها همکار بود، درخواست کرد که در صورت امکان، در پژوهشی که هدفش در برگه رضایت‌نامه توضیح داده شده بود، شرکت کنند. پس از هر مصاحبه، از مصاحبه‌شونده خواسته می‌شد اگر همکار آگاه و مشتاقی را می‌شناسد که حاضر است داوطلبانه، مدتی از وقت خود را برای مصاحبه در اختیار این پژوهش بگذارد، معرفی کند و بدین‌ترتیب، ۱۹ شرکت‌کننده، به تدریج به مطالعه پیوستند[1].

جمع‌آوری داده‌ها

داده‌های مطالعه، از طریق مصاحبه‌های شفاهی و مکتوب، جمع‌آوری شد. قبل از مصاحبه با هر فرد، ابتدا هدف از انجام مصاحبه توضیح داده می‌شد و بعد از امضای برگه «رضایت‌نامه» شرکت در مصاحبه (پیوست الف)، نخست برگه «اطلاعات جمعیت‌شناختی» مصاحبه‌شوندگان توسط خودشان تکمیل می‌شد (پیوست ب) و پس از آن، سؤال‌های مصاحبه نیمه‌ساختاری از آنها پرسیده می‌شد (پیوست ت). در آخرین مرحلهٔ مصاحبه نیز برگه‌ای شامل پنج سؤال ریاضی به هر یک از آنان داده شد تا در صورت تمایل، به آنها پاسخ دهند و به پژوهشگر برگردانند (پیوست ث). قبل از شروع مصاحبه‌ها، از مصاحبه‌شونده‌ها درخواست شد که تنها به سؤال‌های مصاحبه پاسخ دهند و به مشکلات شغلی و دست‌و پاگیر بودن بخش‌نامه‌های ابلاغی، کمبود زمان، مسائل مالی و نظایر آن، نپردازند[2]. بعد از هر مصاحبه، متن ضبط‌شده پیاده شد و در پایان، مصاحبه‌ها برای تجزیه و تحلیل، دسته‌بندی شدند.

---

۱. نمونه‌گیری گلوله برفی

۲. هر وقت مصاحبه‌شونده‌ای خارج از چارچوب سؤال‌ها، می‌خواست وارد مباحث صنفی یا مشکلات اجرایی شود، با درخواست محترمانه مصاحبه‌کننده، به مسیر مصاحبه برمی‌گشت.

قابلیت اعتماد[1] پژوهش

در طراحی این پژوهش و برای تضمین «قابلیت اعتماد»، چهار معیار لینکلن و گوبا (۱۹۸۵) درنظرگرفته شد. برای این کار و به منظور سازگاری در یافته‌ها و اعتباربخشی به آنها، با استفاده از تکنیک مثلثی‌سازی (همسوسازی)، داده‌ها از چند منبع مختلف جمع‌آوری شدند. این منابع عبارت از سابقه تحصیلی و تدریسی شرکت‌کنندگان، مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری شفاهی، مصاحبه‌های مکتوب، و مشاهده‌ها و یادداشت‌های میدانی نویسنده اول از کلاس‌های درس بود. همسویی و همگرایی داده‌ها، پژوهشگران را مطمئن کرد که نتایج، از «قابلیت اعتبار[2]» لازم برخوردارند. همچنین برای اطمینان از «قابلیت انتقال[3]»، اطلاعات جمعیت‌شناختی شرکت-کنندگان و فرایند انجام پژوهش با جزییات دقیق، ارائه شده است تا خواننده بتواند از یافته‌های این پژوهش، با اطمینان در تحقیق و تدریس خود، استفاده کند. «قابلیت اطمینان[4]» این پژوهش، با وفاداری به داده‌ها و منحصرنمودن تمام نقل‌قول‌ها به آنها، استفاده از نقل‌قول‌های معرّف[5] و تأکید بر ویژه[6] بودن در صورت وجود، دیدن روند تعبیر و تفسیر داده‌ها و بررسی یافته‌ها توسط بعضی از شرکت‌کنندگان و تأیید اصالتشان، حاصل شد و بی‌طرفی پژوهشگران نسبت به داده‌ها و عدم سوگیری آنها در تجزیه و تحلی و تفسیر داده‌ها، ضامن «تأییدپذیری[7]» پژوهش است.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها

داده‌های این مطالعه با استفاده از یک برگه جمعیت‌شناختی، مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری فردی با ۱۹ معلم شاغل در دوره دوم متوسطه، مصاحبه‌های مکتوب شامل پنج مسئله ریاضی و مشاهده و یادداشت‌های میدانی نویسنده اول از کلاس‌های درس تعدادی از معلمان شرکت-کننده در پژوهش، جمع‌آوری شد.

---

1. Trusthworthiness
2. Credibility

«اعتبار» در روش‌های تحقیق کیفی، معادل «روایی داخلی» در روش‌های تحقیق کمّی است.

3. Transferability

«قابلیت انتقال» در روش‌های تحقیق کیفی، معادل «پایایی» در روش‌های تحقیق کمّی است.

4. Dependability
5. Representative
6. Ideocyncratic
7. Confirmability

۱. برگه جمعیت‌شناختی؛ که هدف آن، آشنایی با وضعیت تحصیلی و تدریسیِ دبیران شرکت-کننده در مطالعه بود.

۲. مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری فردی؛ شامل ۱۲ سؤال بود.

۳. مصاحبهٔ مکتوب؛ شامل پنج مسئله ریاضی بود که با توجه به پیشینه پژوهشی حوزهٔ مورد مطالعه، تجربهٔ تدریسی نویسنده اول در رابطه با حسابان و سایر درس‌های ریاضی دبیرستانی بود. علاوه بر این، طی گفت‌وگوهای تعاملی دو نویسنده در مورد مناسب بودن هر مسئله و سپس جرح و تعدیل آن در صورت لزوم و اجرای آزمایشی، مسئله‌ها برای اجرای اصلی، نهایی شدند. روال کار چنین بود که پس از هر مصاحبه، به هر یک از ۱۹ مصاحبه‌شونده، برگه مصاحبه مکتوب داده شد و درخواست شد که در صورت تمایل، به آنها پاسخ دهند و به نویسنده اول بازگردانند. مهلتی هم برای این کار تعیین نشد. در مجموع، پنج نفر برگه‌ها را با حل مسئله‌ها، برگرداندند. چگونگی استفاده از دانش ریاضی دانشگاهی در مراحل مختلف تدریس یکی از اهداف مصاحبه مکتوب بود. برای نمونه، مسئله ۵ از نظر ظاهری، شبیه به مسائل معمولی و متداول مدرسه‌ای بود، ولی در واقع حل آن، به دانشی فراتر از حسابان مدرسه‌ای نیاز داشت.

۴. نویسنده اول با کسب اجازه، در یک جلسه از کلاس درس پنج نفر از معلمان شرکت‌کننده در تحقیق شرکت کرد و ضمن مشاهده تدریس‌ها، از آنها یادداشت‌برداری کرد. از این پنج کلاس، سه کلاس مربوط به تدریس حسابان پایه یازدهم و دو کلاس مربوط به تدریس ریاضی پایه دهم بود. این کار به وی کمک کرد تا بهتر بتواند دانش ریاضی را که معلمان دبیرستان در حرفه خود نیاز داشتند، به خصوص مواردی که ممکن بود در مصاحبه‌ها بیان نشود، ببیند.

تجزیه و تحلیل داده‌ها

مصاحبه‌های ضبط‌شده همگی پیاده شدند و با داده‌های جمع‌آوری شده از سه منبع دیگر، همگی با هم ادغام شدند. سپس طی چند مرحله، با شناسایی شباهت‌ها و موارد ویژه، داده‌ها به طور منظم کاهش یافتند و در دسته‌های متفاوت قرار گرفتند. در نهایت در آخرین مرحله کاهش داده‌ها، دو مقوله[1] کلی به دست آمد که هر کدام، شامل چند زیرمقوله شدند. این دو

1. Category

مقوله با توجه به ماهیتشان، «چگونگی استفاده از ریاضی دانشگاهی توسط معلمان ریاضی» و «شکاف بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی» برچسب‌گذاری[1] شدند. در تجزیه و تحلیل داده‌ها، هر جا که نقل‌قولی آمده، معرّف[2] است، مگر آن که ویژه[3] باشد که در آن صورت، قید شده است.

مقوله اول: چگونگی استفاده از ریاضی دانشگاهی در تدریس مدرسه‌ای

نظر مصاحبه‌شوندگان نسبت به چگونگی استفاده از ریاضی پیشرفته دانشگاهی در تدریس خود، شامل ابعاد گوناگونی بود که در پنج زیرمقوله به شرحی که می‌آید، قرار گرفتند.

استفاده مستقیم در تدریس

بعضی از شرکت‌کنندگان، از ریاضی پیشرفته دانشگاهی در تدریس خود به طور مستقیم، استفاده کرده و مصداق‌های آن را با اشاره به عنوان درس‌ها بیان کردند. برای نمونه، اکثر آنها از «مفاهیم ریاضی عمومی۱ و ۲ و حتی آنالیز حقیقی» در تدریس «حسابان» بهره گرفته بودند. یا برای آنهایی که هندسه درس می‌دادند، «مبانی هندسه‌ای که در لیسانس» داشتند، «خیلی خوب بود» زیرا «تمام مفاهیم هندسه‌ای» را که تدریس می‌کردند، در آن درس آموخته بودند. همچنین برای بعضی از آنها، «ریاضی گسسته خیلی درس خوبی بود» و در درسی با همین عنوان که در دبیرستان تدریس می‌کردند، خیلی قابل استفاده بود. علاوه بر اینها، برای بسیاری، درس «نظریه اعداد خیلی به‌دردبخور» بود. یکی از معلمان هم ابراز کرد که «من از مبانی ریاضی خیلی استفاده کردم، مخصوصا موقعی که می خواستم مفهومی درس بدم». این درس‌ها، بیش از بقیه درس‌های موضوعی ریاضی دانشگاهی، مورد استفاده مستقیم معلمان واقع شدند و از سایر درس‌ها به طور خاص، نام برده نشد.

طرح مثال یا تولید مثال نقض جدید

یکی از مواردی که ریاضی دانشگاهی در تدریس دبیرستانی توسط معلمان، استفاده از آن برای «طرح مثال یا مثال نقض جدید» بود. برای مثال، « از آنالیز ۱ فکر کنم خیلی استفاده کنیم. ببینید ما اثبات قضیه ها را استفاده نمی‌کنیم، هیچ وقت! ولی وقتی قضیه‌ها را بدونیم، نسبتاً راحت‌تر

1. Labeling
2. Representative
3. Ideocyncratic

می‌تونیم تدریس کنیم». برای نمونه، «مثلاً کتاب گفته فلان مثال را بزنید. حالا ما تو آنالیز ۱ می‌خونیم اگر f و g پیوسته باشند، جمع و منهاشون هم پیوسته است. بعد با توجه به این اطلاعات، وقتی بهمون می‌گن یک مثال بزنید، می‌تونیم مثال بزنیم. یا یه جا مثلاً عکس را می‌گوید که اگه $f+g$ پیوسته باشد، آیا f و g پیوسته هستند؟ خب ما در آنالیز برای اینها شرط داشتیم که در چه صورت f و g پیوسته می‌شن یا مشتق‌پذیر می‌شون. بعد می‌تونیم مثال یا مثال نقض بزنیم» و قید کردند که آن مثال‌ها را طوری انتخاب می‌کنند که «در سطحی باشه که دانش‌آموزها بفهمند»، ولی تأکیدشان این بود که «اثبات قضیه‌ها اصلاً استفاده نمی‌شود. هیچ کدامشان!». در ادامه این بحث، مثال‌های مشخصی برای مکمل نظرشان زده شد: «مثلاً من می‌خوام یه دونه چندجمله‌ای مثال بزنم که از راه دسته‌بندی تجزیه بشه. خب خودم با توجه به دانش بالاتری که دارم و چیزهایی که از چندجمله‌ای‌ها می‌دونم، مثال را طوری انتخاب می‌کنم که حتماً قابل تجزیه باشه یا به اون شکلی که مدنظرم هست، تجزیه بشه». در صورتی که «زمان ما در دبیرستان [تجزیه] چندجمله‌ای‌های درجه بالا را با اتحادها یاد نگرفتیم . . . بعد دانشگاه چیزهای بیشتری خوندیم، مثلث خیام- پاسکال را نگاه کردیم، بعد تازه از ترکیبیات فهمیدیم که می‌شه ضرایب اینها رو در آورد. خب من از این دانش می‌تونم برای تدریس خودم مثلاً طرح سوال یا مثال استفاده کنم». افزون بر این، در ریاضی دوره اول متوسطه[1] نیز از مثال‌های آشنا در ریاضی دانشگاهی، کمک گرفته می‌شد:

> *مثلاً من سال اولی که داشتم درس می‌دادم، اونوقت‌ها راهنمایی درس می‌دادم و قرار بود اون جلسه، دستگاه‌های دو معادله، دو مجهول را درس بدم. اتفاقاً بازرس هم آماده بود! با اعتمادبه‌نفس رفتم یه دستگاه دو معادله دو مجهول روی تابلو نوشتم، بدون آن که روی ضرایب دقت کنم. بعد که شروع به حل کردم و داشتم توضیح می‌دادم، رسیدم به مثلاً $۳ = ۰.x$ جمع و جور کردنش خیلی اون لحظه سخت بود. بعدها فهمیدم قبل از این که مثال را بزنم، می‌تونم چک کنم و مطمئن بشم چطور دستگاهیه. جواب داره، نداره؟ یک جواب داره یا چند تا؟*

۱. دوره اول متوسطه شامل پایه‌های هفتم، هشتم و نهم است و دوره راهنمایی تحصیلی، معادل پایه‌های ششم و هفتم و هشتم بود.

هنگام مواجه‌شدن با مسائلی که برای آنها، جواب کلاسیکی از قبل نیست

معلمان ریاضی در خصوص استفاده از درس‌های ریاضی که در دانشگاه گذرانده بودند، اشاره کردند که گاهی دانش‌آموزان، سؤالی یا مسئله‌ای را در کلاس مطرح می‌کنند که برای آنها، راه-حل‌های سرراست و مشخصی نداشتند و ریاضی دانشگاهی به کمکشان آمده بود. به طور مثال، یکی از معلمان بیان کرد که یکی از دانش‌آموزان، مسئله‌ای در مورد جایگشت‌ها از وی پرسیده بود و گفته بود که «ما جایگشت ارقام داریم دیگه؟» و هنگامی که پاسخ مثبت معلم را شنیده بود، پرسیده بود که «خانم! با اعداد ۵،۵،۵،۲،۱،۱ چند عدد پنج‌رقمی می‌تونیم بنویسیم؟ با تکرار و بی‌تکرار؟» و مصاحبه‌شونده ابراز کرد که «قشنگ یادم هست این سؤالی بود که خیلی درگیرش شدم»، زیرا ادامه داد که «ما تو حروف، تکرار و اینها داریم تو کلمه نوشتن، ولی تو ارقام نه. اینو چطوری باید حساب کنیم؟» و «یادم هست این سؤال یه هفته‌ای درگیرش شدم. برای حل این مسئله، مجبور شدم به کتاب‌های دانشگاهی مراجعه کنم و با چند تا از همکارها مشورت کنم.» نمونه دیگر، موقع حل این مسئله بود که:

اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۲$ *تابع* g *را به گونه‌ای بیابید که* $(fog)(x)=x^{۲}-۴x+۵$.

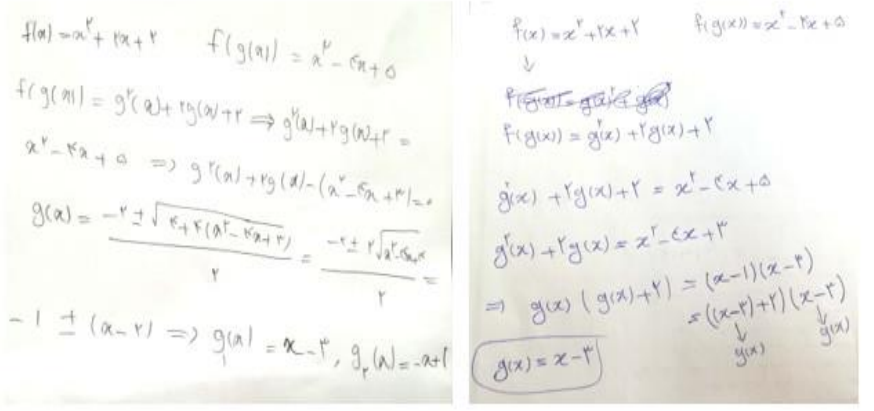
الف) چه تعداد g *می‌توان یافت ؟ توضیح دهید؟*

ب) آیا این مسئله برای مطرح شدن در حسابان سال یازدهم مناسب است؟ چرا؟

ج) در صورتی که پاسخ به قسمت ب منفی است آیا می‌توانید صورت مسئله را به گونه‌ای اصلاح کنید که قابل مطرح کردن در حسابان یازدهم باشد؟

از چهار معلم که به این سؤال پاسخ دادند هیچ کدام پاسخ کاملی برای مسئله پیدا نکردند. سه نفر نوشتند «دو تابع g می‌توان یافت» و یک نفر هم یک جواب پیدا کرد(شکل ۳). در مورد مناسب بودن برای طرح در پایه یازدهم نیز یک نفر اظهار کرد «چون ترکیب توابع را خوانده‌اند، می‌توان در حسابان۱ مطرح کرد، ولی برای دانش‌آموزان مدارسِ عادی، راحت نیست. چون باید بتوانند معادله درجه ۲ که پارامتر دارد را حل کنند»، نفر دیگر نوشته بود که «کتاب جدید این سبک تمرین را ندارد، ولی می‌توان به عنوان سؤالِ اضافه مطرح کرد» و پاسخ یکی هم این بود که «می‌توان مطرح کرد» و هیچ‌کدام به چگونگیِ مطرح‌شدن این مسئله در کلاس، اشاره نکردند. در ضمن، قسمت ج در صورت مسئله، در معلمان نسبت به احتمال

غیرمعمولی بودن مسئله، حساسیت ایجاد نکرد. پس از آن، زمانی که راجع به پاسخ درست مسئله با آنها صحبت شد، همه اظهار کردند که «مناسب کلاس حسابان یازدهم نیست و نیاز به داشتن دانش ریاضی فراتر از ریاضی مدرسه‌ای دارد»، در حالی که بیان نمودند که «اگر این مسئله از طرف یک دانش‌آموز در کلاس مطرح می‌شد»، ممکن بود دچار اشتباه شوند- همان-طور که ظاهر ساده مسئله آنها را هم به اشتباه انداخته بود. به طور مثال یکی از معلمان ابراز کرد «اصلاً دقت نکردم. کمی تغییر در یک مسئلهٔ به ظاهر ساده، می‌تواند آن را به یک مسئله غیرمعمولی تبدیل کند. البته الان که راه حل را دیدم، در واقع سخت نبود، ولی تا حالا باهاش برخورد نکرده بودم.»



شکل ۳ دو نمونه از پاسخ های معلمان به مسئله شماره ۵ مصاحبه مکتوب ریاضی

- ایجاد دید کلی نسبت به ماهیت ریاضی، ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی‌وار فکرکردن

معلمان در پاسخ این که در تدریس دبیرستانی خود، کدام درس‌ها یا مباحث ریاضی دانشگاهی بیشتر برایشان مفید بود، اکثرشان تنها چند درس را نام بردند. ولی وقتی از ایشان سؤال شد که کدام درس‌های دانشگاهی از نظرشان قابل حذف کردن بود و نیازی به ارائه آنها حس نمی-کردند، اظهار کردند که شاید از بعضی از دروس در تدریس دبیرستانی، به طور مستقیم استفاده نشود، ولی به خاطر دید کلی و شناختی که نسبت به ریاضی به آنها داده‌اند، قابل حذف کردن نبودند یا برای درک سایر قسمت‌های ریاضی و ریاضی‌وار فکرکردن، به آنها نیاز داشتند. به

طور مثال، چند نفر به توانایی استدلال و اثباتی که درس‌های ریاضی در آنها ایجاد کرده بود، اشاره کردند. با این حال، به گفته تعدادی از معلمان، با وجودی که درس‌هایی بودند که در تدریس ریاضی دبیرستان نقشی نداشتند، ولی «بهمون ایده می‌ده، یعنی مثلاً بگم از جبر هیچ وقت تو دبیرستان استفاده نکردم، من فوق لیسانسم هم جبرناجابجایی بوده، اصلاً استفاده نکردم. شما بگو یک در هزار. ولی دیدم نسبت به مباحث جبر و اینها بیشتره». علاوه بر این، تأکیدشان این بود که « خب درسته مستقیم استفاده نمی‌کردیم، ولی خیلی بهمون دید داد که چه جوری ریاضی فکر کنیم، استدلال کنیم. همه درس‌ها یه جور دید آدم رو باز می‌کنه. ممکنه مستقیم استفاده نشوند». در مجموع، معلمان نظرشان این بود که «هیچ درس ریاضی دانشگاهی که خوندیم رو نمی‌شه حذف کرد. ممکنه ازش مستقیم استفاده نکنی، ولی در مقاطع بالاتر یا جاهای دیگه، ممکنه به دردت بخوره» و «همه درس‌ها، کلاً از نظر تئوری شاید هیچ وقت به درد نخورن، ولی چون ازشون استفاده می‌شه، یعنی مثلاً چون اطلاعاتشو داریم، به دردمون می‌خوره.»

ایجاد آمادگی برای پاسخ به سؤال‌های غیرمنتظره دانش‌آموزان

معلمان نظرشان این بود که وقتی با سؤال غیرمنتظره‌ای از جانب دانش‌آموزان مواجه می‌شوند، دانش پیشرفته ریاضی که در دانشگاه کسب کرده‌اند، به کمکشان می‌آید؛ سؤالی که نه در کلاس مطرح شده و نه در کتاب درسی، ولی ممکن است توسط یکی در کلاس، مطرح شود. نمونه زیر، معرّف است:

> *وقتی خودم دارم برای دانش‌آموزها توضیح می‌دم، اگر که یک دانش‌آموز بگه چه اشکالی داره برای مثال، "اگه دو تا زاویه ۹۰ درجه تو یک مثلث باشه"، من با توجه به سواد هندسه ناقلیدسی می‌گم تو بعضی فضاها اشکال نداره. بعداً وقتی ادامه تحصیل دادین، مثلاً می‌خونین. یا مثلاً وقتی می‌پرسن "دو خط موازی کجا همدیگر رو قطع می‌کنن"، می‌گم "با سوادی که شما دارین، هیچ‌جا، هیچ‌وقت همدیگر رو قطع نمی‌کنن".*

البته موردهایی هم بود که «بعضی وقت‌ها، دانش‌آموزان مسئله‌ای را جایی می‌بینند و ممکنه بخوان معلم رو اذیت کنن و اونو می‌آرن سر کلاس و مطرح می‌کنن. حتی ممکنه مربوط به

مبحثی که تدریس هم کردیم نباشه. بهشون می‌گم که توی کلاس راهنماییشون می‌کنم و خب طبیعتاً، باید سوادِ ریاضیِ حل کردن اون مسئله رو داشته باشم.»

مقوله دوم: شکاف بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی

با وجود استفاده‌های مؤثری که معلمان از بعضی درس‌های ریاضی دانشگاهی در تدریس مدرسه‌ای خود داشتند، اما نسبت به شکافی که بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی احساس می‌کردند، نظرات قابل تأملی ابراز کردند. این نظرات، در چند زیرمقوله به شکل زیر، قرار گرفتند.

عدم ایجاد نگاه کل‌نگر به ریاضی دوره متوسطه در دانشجو- معلمان ریاضی

از نظر معلمان، باز- طراحی درس‌ها به گونه‌ای که ارتباطات بین ریاضی دانشگاهی و ریاضی مدرسه‌ای را به دانشجو- معلمان نشان دهد، یک ضرورت جدی بود که عدم توجه به آن، شکاف بین این دو را عمیق کرده بود. به گفته آنان، «چیزی که ما لازم داشتیم، این بود که یه درس داشته باشیم در دانشگاه که مثل ریاضی دانشگاهیه معمولی نباشه. یعنی درس‌های دبیرستان باشه، ولی نه خود ریاضی دبیرستان. می‌دونین! با جزئیات زیاد باشه» و در توضیح این خواسته، مثال می‌زدند که «مثلاً تابع را از دیدگاه‌های مختلف ببینند، نه فقط اثبات‌های آنالیزی و صفر تا صد تابع رو بدونن. ممکنه شرایطی پیش بیاد که با این دانش معمولی دانشگاهی، نتونی جواب بِدی». افزون بر این، مشکل دیگری که ابراز شد این بود که بعضی مفاهیم ریاضی، بارها در پایه‌های مختلف و به شکل‌های گوناگون مطرح می‌شود. با این وجود، در دوره آماده‌سازی برای معلمی در دانشگاه، به آنها آموزش داده نشده است که چگونه این تنوع را مدیریت کنند و در هر پایه، با چه سطح و عمقی، به آن بپردازند تا در نهایت، دانش-آموز به فهم و درک جامعی از آن مفهوم برسد، «خب ببینید! دهم تابع دارند. یازدهم تابع دارند، پیشرفته‌تر از دهم. دوازدهم تابع دارند، پیشرفته‌تر از قبلی‌ها. معلم باید تلفیق اینها را بدونه» و برای این که بتواند در دانش‌آموزان مهارت استفاده از چنین دانشی را ایجاد کند، خودش لازم است که بر فرایند معناسازی و تلفیق مراحل مختلف شکل‌گیری مفاهیم، «کاملاً مسلط باشه». در صورتی که تجربه مشترکشان این بود که «یه چیزهایی در دانشگاه خوندیم که شاید یک درصد به درد بچه‌ها نخوره! یه سری محفوظات» و به این دلیل، «وقتی بخوایم بریم درس

بدیم، نمی‌تونیم یک جمع‌بندی کامل برای بچه‌ها بگیم» و این موضوع، شکاف بین ریاضی دانشگاهی و ریاضی مدرسه‌ای را بیشتر نمایان می‌کرد.

از این گذشته از نظر آنها، گذراندن بعضی درس‌ها در دوره کارشناسی به نوعی که ارائه شده بود، ضروری نبود و در تدریس ریاضی دبیرستان، برایشان کارایی نداشت. برای نمونه، گله آنها این بود که چرا «هیچ‌وقت به ما نگفتند این درس‌هایی که داریم می‌خونیم، کجا ازش می‌تونیم استفاده کنیم؟ مثلاً توپولوژی چه کاربردی داشت؟». همچنین وقتی اکثر معلمان برای نمونه، به درس «جبر» اشاره کردند، پژوهشگر با طرح مثال زیر، نظر آنها را به چالش کشید:

> *در جبر مجرد اثبات می‌کنیم اعداد حقیقی دارای مقسوم‌علیه صفر نیستند. با توجه به این نکته می‌توان درمورد ریشه‌های یک معادله درجه دوم (و همینطور چند جمله‌ای‌های مرتبه بالاتر) بحث کرد. مثلاً خیلی راحت می‌توان دید که چرا* $x=1$ *و* $x=3$*، جواب‌های معادله* $(x-1)(x-3)=0$ *هستند. با این وجود، بدون این قضیه نمی‌توان توضیح داد که چرا این دو، تنها جواب‌های معادله هستند.*

با طرح این نوع چالش‌ها، اکثر معلمان نسبت به غیرضروری بودن بعضی درس‌های دانشگاهی مانند «جبر»، نظرشان تغییر می‌کرد ولی تأکید داشتند که هیچ وقت در دانشگاه، به این شکل آموزش ندیده یا حداقل به مسئله‌های نظیر این، به این صورت نگاه نکرده بودند. چنین مثال‌هایی، برای دانشجو- معلمان ریاضی این فرصت را فراهم می‌آورد که ببینند چطور مفاهیم «جبر دانشگاهی» به طور مستقیم، در ریاضی دبیرستان که تدریس می‌کنند، کاربرد دارد.

عدم آشنایی با مسائل ریاضی در زمینه دنیای واقعی

یکی از مسائلی که معلمان ریاضی به آن اشاره کردند این بود که هیچ کدام از درس‌هایی که در دانشگاه گذراندند، پاسخ‌گوی نیازشان برای مرتبط کردن تدریس یک مفهوم یا موضوع ریاضی با یک مسئله دنیای واقعی نبود. یکی از آنها اظهار کرد «می‌دونین! ارتباط ریاضی با دنیای بیرون خیلی مؤثره. یه مطلبی رو که آموزش می‌دی، کاربردش در علوم دیگه‌اس، تو پزشکی، مهندسی اگه بتونی پیوندی برقرار کنی، خیلی مفیده. تو دانشگاه درسی در این زمینه نداشتیم، فقط یه آهنگ تغییرات بود که با فیزیک می‌تونستی ارتباطش بِدی، سرعت و شتاب، در همین حد!». در حالی که «الان مسائل کاربردی در کتاب‌ها خیلی بیشتر شدن نسبت به قبل. بعضی‌هاشون

خیلی خوب شدن. خب منِ معلم بلد نیستم کاربردی برای بچه ها کار کنم. اگه بشه حل مسئله واقعی و کاربردی رو در دانشگاه تقویت کرد» زیرا دانشجو- معلمان، «مسلماً وقتی بهتر یاد بگیرن، می‌تونن حداقل بهتر آموزش بِدن». از نظر آنان، دبیران ریاضی «دوست دارن حسابان درس بِدن یا هندسه»، ولی در تدریس ریاضی برای شاخه فنی- حرفه‌ای و کار- دانش، مشکل دارند و «تدریس کتاب‌های فنی خیلی سخت‌تره»، زیرا «مسائل کاربردیش- یعنی مسائلش با مفاهیمی که در کتاب هست، برای بچه‌های رشته‌های فنی سنگینه و بیشتر معلم‌ها هم برای تدریس این مسائل، آموزش ندیدن.»

ناهماهنگی در برنامه‌های آموزش معلمان در دانشگاه‌های مختلف

هنگامی که پژوهشگر از معلمان ریاضی شرکت‌کننده در مورد محتوای درس‌هایی که در دوره کارشناسی ریاضی گذرانده بودند سؤال کرد، متوجه شد با این که ظاهراً سرفصل درس‌ها در دانشگاه‌های مختلف یکسان است، ولی در روش ارائه بعضی درس‌ها به‌ویژه درس‌هایی که مخصوص رشته آموزش ریاضی (دبیری ریاضی) است، تفاوت زیادی وجود داشت. به طور مثال، بعضی از معلمان اظهار کردند که در درس «آموزش ریاضی»، کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های مختلف متوسطه را تحلیل محتوا کرده بودند، در حالی که به گفته بعضی دیگر، این درس به روش‌های تدریس ریاضی اختصاص یافته بود. یا این که برای عده‌ای، درس مبانی هندسه، به بحث درباره محتوای هندسه دبیرستانی در سطحی کمی بالاتر، پرداخته بود، در صورتی که عده‌ای دیگر، در این درس به مطالعه هندسه سطح بالای دانشگاهی پرداخته بودند.

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش در تلاش برای توصیف چگونگیِ استفاده معلمان ریاضی از ریاضی دانشگاهی در تدریس ریاضی مدرسه‌ای آنها بود. یافته‌های این پژوهش نشان داد که ایجاد یک نگاه کل‌نگر به ریاضی مدرسه‌ای در دانشجو- معلمان ریاضی، یک ضرورت است تا آنان قادر شوند که به باز- طراحی درس‌های ریاضی مدرسه‌ای بپردازند و بدین طریق، ارتباط و اتصال مناسبی بین ریاضی دانشگاهی و ریاضی مدرسه‌ای به وجود آورند. این در حالی است که عدم آشنایی بسیاری از استادان ریاضی با نیازهای ریاضی مدرسه‌ای در دانشگاه‌هایی که مشغول تربیت معلم ریاضی هستند، ایجاد این ارتباط را با مشکل روبرو کرده است. اگرچه در کشورهای مختلف،

پیش‌نیازهای لازم برای آماده‌سازی معلمان برای تدریس ریاضی در دبیرستان با هم متفاوت است (لیکین و زازکیس، ۲۰۱۷) و در بعضی از آنها داشتن حداقل مدرک کارشناسی ریاضی و در بعضی دیگر، تنها گذراندن تعدادی درس‌های ریاضی در دانشگاه، کافی است، ولی همه دانشجو- معلمان، تعداد قابل‌توجهی درس‌های ریاضی می‌گذرانند که توسط ریاضی‌دان‌ها تدریس می‌شود که به باور آنان، برای ایجاد ارتباط معنادار بین ریاضی دانشگاهی و ریاضیاتی که معلمان در تدریس به آن نیازمندند، کافی نیست. بدین سبب، طراحی درس‌هایی که ایده‌های بنیادیِ ریاضیِ مدرسه‌ای را از دیدگاه پیشرفته بررسی کند، یک ضرورت است. معلمان ریاضی دوره دبیرستان نیاز به دانش عمیق ریاضی برای مؤثر بودن تدریس خود دارند. در گزارش‌هایی مانند «آموزش ریاضی برای معلمان[1]»، نشان‌داده‌شده است که دبیران ریاضی، افزون بر درس‌های محتوایی ریاضی با کیفیت بالا، نیازمند رویارویی با تجربه‌های یادگیریِ متفاوت و ملموسی درباره ایجاد ارتباط بین ریاضی دبیرستانی و ریاضی دانشگاهی در موقعیت‌های تدریسیِ متفاوت هستند؛ موقعیت‌هایی که از آنها می‌توان سناریوها یا «داستان‌های توصیفی کوتاه[2]» و دقیق بر مبنای چالش‌هایی مانند آنچه که در این پژوهش نشان داده شد، طراحی کرد. سپس با طرحشان در کلاس‌های دانشگاه، برای دانشجو- معلمان یا کسانی در گرایش‌های دیگر ریاضی که علاقه‌مند به تدریس هستند، فرصت آشنایی با چنین تجربه‌ها و تجزیه و تحلیلشان را فراهم نمود. این فعالیت‌ها، به آنان کمک می‌کند تا به طور عملی، با نمونه‌های متنوعی از ضرورت ارتباط بین ریاضی دانشگاهی و مدرسه‌ای مواجه شوند که به ریاضیِ ویژه‌ای نیاز دارد که ماهیت آن، با هر دو نوع ریاضی متفاوت است؛ همان ریاضیاتی که هدف این پژوهش، شناسایی ماهیت و توصیف آن بود. بعد از انتشار «استانداردهای تدریس حرفه‌ای ریاضی» توسط «شورای ملی معلمان ریاضی» (۱۹۹۱)، بیش از دو دهه پژوهش‌های بسیاری انجام شد و بر اساس یافته‌های آنها، منابع بسیاری برای معلمان ریاضی مشغول به تدریس و برنامه‌های آماده‌سازی دانشجو- معلمان ریاضی تولید شد. در ادامه، «اتحادیه آموزشگران معلمان ریاضی[3]» استانداردهای «آماده‌سازی معلمان ریاضی[4]» (۲۰۱۷) را تولید و به

1. The Mathematical Education Of Teachers II- CBMS
2. Vinegtte
3. Association Of Mathematics Teacher Educators
4. Standards For Preparing Teachers Of Mathematics: SPTM

صورت الکترونیکی منتشر کرد و نسخه چاپی آن را در سال ۲۰۲۰، در اختیار خوانندگان قرار گرفت. در بند هفتم این سند که مربوط به آماده‌سازی معلمان ریاضی دبیرستان است، تأکید شده که آماده‌سازی دانشجو- معلمان ریاضی از حیث دانشِ موضوعی، نیاز به برنامه‌هایی کارامد دارد که بر ارتباط و اتصال بین محتوای ریاضیِ دانشگاهی و محتوایِ ریاضیِ دبیرستانی که همان دانش بحث‌شده در این پژوهش بود، تمرکز داشته باشد.

سخن پایانی این است که به‌روز نبودن برنامه‌ها و ناهماهنگی در برنامه آموزش دانشجو- معلمان ریاضی در دانشگاه‌های مختلف، به خصوص در یک نظام آموزش عمومی متمرکز نظیر ایران، با مشکلات بیشتری همراه است، زیرا همه دانش‌آموختگان ریاضی که برای تدریس آماده می‌شوند، ملزم به اجرای یک برنامه مشترک و با ارزشیابی یکسان هستند. یکی از نتایج این مطالعه نشان داد که اگرچه سرفصل درس‌های دوره کارشناسی آموزش ریاضی یا گرایش دبیری در دانشگاه‌ها ظاهراً مشترک است، اما بعضی از درس‌ها به خصوص درس‌های موضوعی- تربیتی آموزش ریاضی، نیازمند بازنگری اساسی و جایگزین شدن با محتوایی با کیفیت‌تر است.

سپاسگزاری: استاد راهنمای نویسندهٔ اول مقاله- حمیده سرشتی- آقای دکتر امیدعلی شهنی-کرمزاده، استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز هستند که دانشجوی دوره دکتری آموزش ریاضی است. دانشجو بنا به توصیه استاد راهنمای محترم، از تاریخ ۱۳۹۵/۱۰/۲۸ به مدت یک نیم‌سال تحصیلی را برای فرصت مطالعاتی، در دانشگاه شهید بهشتی گذراند و تحت راهنمایی نویسنده دوم، چارچوب این مقاله تهیه شد و ارتباط پژوهشی تا رسیدن به نتیجه نهایی، ادامه یافت. بدین وسیله از راهنمایی‌ها و زحمات آقای دکتر امیدعلی شهنی‌کرمزاده و دانشگاه شهید چمران اهواز، سپاسگزاری و قدردانی می‌شود.

منابع

برنز، مریلین (۲۰۱۴). پرده‌برداری از برنامه درسی ریاضی. ترجمه سهیلا غلام‌آزاد (۱۳۹۴). *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۱۲۲، صص۱۲-۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

گویا، زهرا (۱۳۸۴). دانش مورد نیاز، برای تدریس در دوره‌های ابتدایی. *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۸۰. صص. ۲۳ تا ۳۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

گویا، زهرا، و مرتاضی مهربانی، نرگس (۱۳۹۳). *گزارش نهایی طرح بررسی دانش مورد نیاز آموزگاران برای تدریس ریاضی دوره ابتدایی* .پژوهشکده برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

نژاد ایرد موسی، محرم (۱۳۹۵). کارآگاهی در کلاس آقای مهریار. رشد برهان دوره متوسطه دوم. شماره ۹۸. صص ۱۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش.

Association of Mathematics Teacher Educators. (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics.* Available online at *amte.net/standards*.

Association of Mathematics Teacher Educators. (2020). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Information Age Publishing Inc and & the Association of Mathematics Teacher Educators.

Ball, D. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis and E. Simmt (Eds.); *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*; 3-14.

Ball, D. (2000). Bridging Practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*; 51(3), 241-247. Springer.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teacher: What makes it special? *Journal of Teacher Education*; 59(5), 389-407. Springer.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler; R.W. Scholz; R. Straesser & B. Winkelmann. (Eds.); *Mathematics didactics as a scientific discipline: The state of the art*; pp. 73–88. Kluwer Academic Publishers.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2012). The mathematical education of teachers II. Providence, RI: American Mathematical Society.

Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? A conceptualization taking into account academic and school Mathematics. *Journal of Math Didakt*. 39:319–341. Springer.

Eichler, A. & Ernes, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus, *ZDM Mathematics Education.* 46:647–659. Springer.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*. Vol. 42, No. 2, pp. 371–406

Hodge, A., Gerberry, C., Moss, E., & Staples, E. (2010). Purposes and Perceptions: What do university mathematics professors see as their role in the education of secondary mathematics teachers? *PRIMUS*. 20 (8), 646-663. Taylor & Francis Group.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic enquiry*. Sage Publishing.

Ma, L. P. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. *Educational Studies in Mathematics*. 42, 101-106. Springer.

McCrory. R, Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. & Senk, S. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 43, No. 5, pp. 584-615. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics: NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA. The Author.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15(2), 4–14. American Educational Research Association.

Speer, N., King, K. & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 18(2), 105–122. Springer.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. Journal teaching and teacher education. 26: 161–172. Elsevier Ltd.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organizing framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. From Book Mathematical knowledge in teaching, 195-211.

Weigand, H., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., Schubring, G. & Tobies, T. (2017). What is and what might be the legacy of Felix Klein? Proceedings of ICMI13 in Hamburg. 321-334. Springer.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*. Vol. 58, N. 3, pp 372-382. American Mathematical Society.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*. 12:263-281. Taylor & Francis Group.

Zazkis, R., Leikin, R. & Meller, M. (2017). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Springer.

پیوست الف

(رضایت‌نامه شرکت در مصاحبه برای انجام یک پژوهش)

پژوهشی با عنوان «دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس در دبیرستان با تأکید بر درس حسابان» در دست انجام است که موضوع رساله دکتری اینجانب- حمیده سرشتی- است. هدف این پژوهش، شناسایی و توصیف دانش ریاضیِ مورد نیاز دبیران ریاضی برای تدریس ریاضی در دوره دبیرستان است. پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهند که از جمله دانش‌هایی که دانستن آن برای معلمان ریاضی ضروری است، «دانش محتوایی ریاضی مرتبط با مدرسه» است. از شما که در چند سال گذشته در دبیرستان درس‌های حسابان۱ و ۲ را تدریس کرده‌اید، خواهش می‌کنم در یک مصاحبه نیمه‌ساختاری که برای جمع‌آوری داده‌های این پژوهش طراحی شده، شرکت کنید. سؤال اصلی این پژوهش این است که دانشجو- معلمان ریاضی، نیازمند گذراندن چه نوع درس‌های ریاضی در دوران تحصیلات دانشگاهی خود هستند؟ همه مصاحبه‌ها ضبطِ شنیداری می‌شوند و برای حفظ محرمیت، در دسترس افراد دیگری به غیر از اعضای تیم پژوهش، قرار نخواهند گرفت. همچنین، موقع نقل کردن همه یا بخش‌هایی از مصاحبه‌ها، حتماً از نام مستعار یا کُد، استفاده می‌شود.

از این که وقت خود را داوطلبانه در اختیار مصاحبه‌کننده قرار می‌دهید، سپاسگزارم. هر زمان که طی مصاحبه احساس خستگی یا عدم‌رضایت کردید، مصاحبه متوقف خواهد شد. هماهنگیِ زمان و مکان مصاحبه با توافق مصاحبه‌شونده است. در صورت رضایت برای شرکت در این مصاحبه، لطفاً برای رعایت حقوق خود و اعلام آگاهی از محتوای پژوهش، برگه زیر را امضا کنید. اگر اطلاعات بیشتری در مورد این پژوهش خواستید، لطفاً با پژوهشگر از طریق تلفن همراه وی به شماره . . . ، تماس بگیرید.

با سپاس مجدد از همکاری شما؛

حمیده سرشتی

دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

اینجانب . . . . . با آگاهی از این که شرکت من در این مطالعه داوطلبانه است، موافقت خود را با همکاری در این تحقیق اعلام می‌کنم و می‌دانم هر زمانی که مایل باشم و بدون نیاز به ارائه دلیل می‌توانم از مطالعه خارج شوم. در ضمن، به پژوهشگر اجازه می‌دهم که متن مصاحبه را با حفظ محرمیت (بدون نام و نام خانوادگی اصلی) منتشر نماید.

امضاء شرکت‌کننده تاریخ

امضاء پژوهشگر تاریخ

پیوست ب

(اطلاعات جمعیت‌شناختی مصاحبه‌شوندگان)

نام و نام خانوادگی **(اختیاری)**:

سابقه تدریس:

۱ تا ۵ سال □ ۵ تا ۱۵ سال □ ۱۵ تا ۲۵ سال □ بیشتر □

مدرک تحصیلی:

کاردانی □ کارشناسی □ کارشناسی ارشد □ سایر □

رشته تحصیلی:

ریاضی □ غیرریاضی □

گرایش تحصیلی:

دبیری □ غیردبیری □ آموزش ریاضی (کارشناسیِ ریاضی در دانشگاه فرهنگیان) □

دانشگاه محل تحصیل:

سال‌های تدریس ریاضی:

در دوره اول متوسطه (دوره راهنمایی تحصیلی) □ در دوره دوم متوسطه □

پایه‌های تدریس شده:

آموزش‌های ضمن‌خدمت:

- کارگاه آموزشی استانی □ دوره بازآموزی استانی □
  دوره بازآموزی کشوری □ دوره‌های مجازی □
- تعداد ساعت □
- اجباری □ اختیاری □

پیوست پ

مشخصات تحصیلی و تدریسیِ معلمان شرکت کننده در مصاحبه

ردیف	رشته تحصیلی	سابقه تدریس	دانشگاه محل تحصیل	جنسیت	درس‌های تدریس‌شده
T1	دبیری ریاضی	۲۰	دانشگاه اصفهان	مرد	**حسابان۱**، هندسه، ریاضی دهم تجربی و ریاضی
T2	دبیری ریاضی	۲۳	دانشگاه اصفهان	زن	ریاضی دهم تجربی و ریاضی، یازدهم ریاضی، هندسه دهم، **حسابان۱**
T3	ریاضی کاربردی	۱۰	دانشگاه گیلان	زن	هندسه ۱ و۲، امار و احتمال، **حسابان۱**، ریاضی دهم
T4	آموزش ریاضی	۲	فرهنگیان اصفهان	زن	ریاضی ۷و ۸ و ۹ و ۱۰، **حسابان۱**
T5	آموزش ریاضی	۲۵	فرهنگیان اصفهان	زن	**حسابان۱** و**۲**، یازدهم تجربی، دهم تجربی، دوازدهم تجربی
T6	دبیری ریاضی	۲۵	شهید چمران اهواز	زن	**حسابان۱** و **۲**، تمام درس‌های رشته تجربی، هندسه ۲، ، هنرستان پایه دهم
T7	ریاضی کاربردی	۱۰	دانشگاه اصفهان	مرد	ریاضی ۷ و ۸ و۹ و۱۰، هندسه ۲، **حسابان ۱**
T8	ریاضی محض	۱۰	دانشگاه یزد	زن	ریاضی ۷ و ۸ و۹ و حسابان۱
T9	آموزش ریاضی	۱۹	فرهنگیان اصفهان	مرد	۷ و ۸ و ۹ ، ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی، ریاضی یازدهم تجربی، **حسابان۱**
T10	ریاضی کاربردی	۱۸	دانشگاه اصفهان	زن	هندسه ۱ و ۲، ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی، **حسابان۱**، ریاضی یازدهم تجربی
T11	دبیری ریاضی	۲۵	شهید باهنر کرمان	مرد	**حسابان۱** و **۲**، ریاضی دهم ریاضی، هندسه ۱ و ۲
T12	آموزش ریاضی	۱۷	فرهنگیان اهواز	مرد	ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی، **حسابان۱**، ریاضی ۷ و ۸ و۹

ردیف	رشته تحصیلی	سابقه تدریس	دانشگاه محل تحصیل	جنسیت	درس‌های تدریس‌شده
T13	دبیری ریاضی	۱۴	فرهنگیان اصفهان	زن	ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی، آمار و احتمالات، **حسابان۱** و **۲**، ریاضی یازدهم ریاضی
T14	ریاضی محض	۱۶	شهید چمران اهواز	زن	**حسابان۱** و **۲**، ریاضی دهم و یازدهم رشته تجربی و ریاضی، هندسه ۱ و ۲
T15	دبیری ریاضی	۱۸	دانشگاه اصفهان	مرد	**حسابان۱** و **۲**، ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی، هندسه ۱ و۲
T16	آموزش ریاضی	۴	فرهنگیان اصفهان	زن	ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی، ریاضی یازدهم تجربی، **حسابان۱**
T17	آموزش ریاضی	۹	فرهنگیان اصفهان	زن	ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی، ریاضی یازدهم رشته ریاضی، **حسابان۱**
T18	آموزش ریاضی	۸	فرهنگیان اصفهان	زن	ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی، ریاضی یازدهم تجربی، **حسابان۱** و هندسه ۱
T19	آموزش ریاضی	۱۰	فرهنگیان اصفهان	مرد	ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی، ریاضی یازدهم رشته ریاضی، هندسه ۱ و **حسابان۱**

پیوست ت

(سؤال‌های مصاحبه نیمه‌ساختار یافته شفاهی)

۱. فکر می‌کنید برای آمادگی تدریس در دوره دبیرستان، دانشجو- معلمان به چه نوع درس-هایی نیاز دارند؟ چرا ؟ مثال بزنید.
۲. به طور مشخص برای تدریس حسابان، دانشجو- معلمان ریاضی، چه نوع درس‌هایی را لازم است حتماً بگذرانند؟
۳. جای چه درسی در برنامه درسی شما خالی بوده است؟
۴. از نظر شما، کدام درس‌هایی را که در دانشگاه گذراندید، در تدریس ریاضی شما نقشی نداشت؟
۵. وقتی تدریس را شروع کردید، از کدام درس‌های دانشگاهی و با چه تغییراتی، برنامه مدرسه‌ای خود را طراحی کردید؟
۶. با سؤال‌های جدیدی که جواب کلاسیک آماده ندارند یا شما به آنها فکر نکرده بودید، چگونه مواجه می‌شوید؟
۷. با موقعیت‌های چالش‌برانگیز در کلاس درس، چگونه مواجه می‌شوید؟ ریاضی دانشگاهی چه کمکی به شما می‌کند؟
۸. تدریس کدام درس‌های ریاضی، به تدریس حسابان کمک می‌کند؟
۹. از نظر شما، مشکلات اصلی دانش‌آموزان در درس حسابان، کدامند؟
۱۰. از نظر شما، ارائه درس حسابان در دبیرستان، چه ضرورتی دارد؟
۱۱. توصیه شما برای برنامه درسی حسابان در دبیرستان چیست؟
۱۲. برای تکلیف‌های خارج از کتاب، بیشتر از چه منابعی استفاده می‌کنید؟

پیوست ث

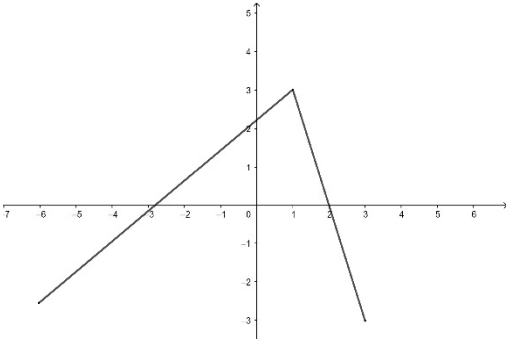
(سؤال‌های مصاحبه مکتوب)

۱. تدریس حد را چگونه شروع می‌کنید؟ اگر با مثال شروع می‌کنید، دلیل آن را بنویسید؟

۲. سه مثالی را که معمولاً در تدریس حد از آنها استفاده می‌کنید، به ترتیب اولویت و بیان دلیل آن، بنویسید.

۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

نمودار تابع f به صورت زیر است. حد $\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]$ را به‌دست آورید.



فرض کنید مسئله بالا را برای دانش‌آموزان کلاس حسابان خود مطرح کرده‌اید و پاسخ یکی از آنها، به صورت زیر است:

چون وقتی $x \to 1$ داریم $f(x) \to 3^-$ پس $\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right] = [3^-] = 2$

او در توضیح پاسخ خود نوشته که «داخل براکت کمتر از ۳ است (3^-)، پس جواب ۲ می‌شود.»

الف) برای پاسخ صحیح به این مسئله، درک چه مفاهیمی در ریاضی و حسابان لازم است؟

ب) پاسخ او را ارزیابی کنید. این دانش‌آموز در چه قسمتی مشکل داشته و بدفهمی‌های او کدامند؟

پ) برای رفع این بدفهمی‌ها، چه اقدامی می‌کنید؟

ت) از نظر شما، چند درصد از دانش‌آموزان شما ممکن است پاسخشان به این سؤال، مشابه این باشد؟ چرا؟

ث) اگر بخواهید با یک مثال ریاضی، علت اشتباه‌بودن پاسخ را به دانش‌آموز توضیح دهید، از چه مثال یا مثال‌هایی استفاده می‌کنید؟

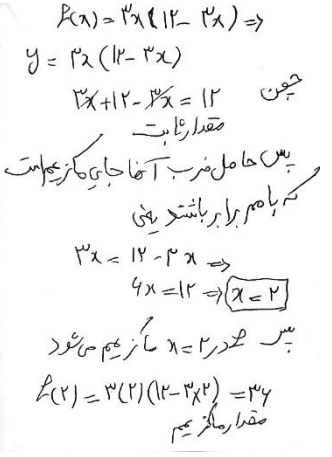
ج) اگر از نمودار تابع خاصی ممکن است استفاده کنید، آن را رسم کنید.

چ) در بررسی راه‌حل‌های سایر دانش‌آموزان، انتظار دیدن چه پاسخ‌هایی را برای این مسئله دارید؟ چرا؟

۴. فرض کنید در امتحان سراسری، مسئله زیر از مبحث کاربرد مشتق، به دانش‌آموزان داده شده باشد:

مسئله: اگر $f(x)=3x(12-3x)$ باشد، تابع در چه نقطه‌ای ماکزیمم می‌شود؟ مقدار ماکزیمم را بیابید.

همچنین، فرض کنید که دانش‌آموزی، این مسئله را به صورت زیر حل کرده باشد:



الف) ارزیابی شما از این پاسخ، چیست؟

ب) چگونه به این پاسخ نمره می‌دهید؟ چرا؟

۵. اگر $f(x)=x^2+2x+2$ تابع g را به گونه‌ای بیابید که $(fog)(x)=x^2-4x+5$

الف) چه تعداد g می‌توان یافت ؟ توضیح دهید؟

ب) آیا این مسئله برای مطرح شدن در درس حسابان پایه یازدهم مناسب است؟ چرا؟

ج) در صورتی که پاسخ به قسمت ب منفی است، آیا می‌توانید صورت مسئله را به گونه‌ای اصلاح کنید که قابل مطرح کردن در درس حسابان پایه یازدهم باشد؟