

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

Identifying Misconceptions of High School Students about First Order Equation

تاریخ دریافت مقاله: ۹۱/۱۱/۱۲؛ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۲/۰۸/۰۴

E. Aminifar (Ph.D)
Kh. Karimi Kiya
F. Kamali Khamse

الهه امینی‌فر^۱
خدیجه کریمی‌کیا^۲
فرحبخش کامالی‌خمسه^۳

Abstract: This research aimed to identify the first year high school students' misconceptions in Pakdasht city in terms of first order equations. In mathematics and science, students need to set up equations and solve them and thus, students must have well-developed understanding of equations. Since conceptual errors are part of the conceptual understanding, and part of the students' concept formation processes, they can be considered as a useful educational tool. In order to identify the junior high school students' misconceptions of equations, a test was designed and conducted. The results of this study indicate that students have misconceptions regarding the concept of equation, the equal sign, variable, solving equations, translate word problems into equations and the equations equivalence. Such misconceptions could prevent students from learning higher order equations.

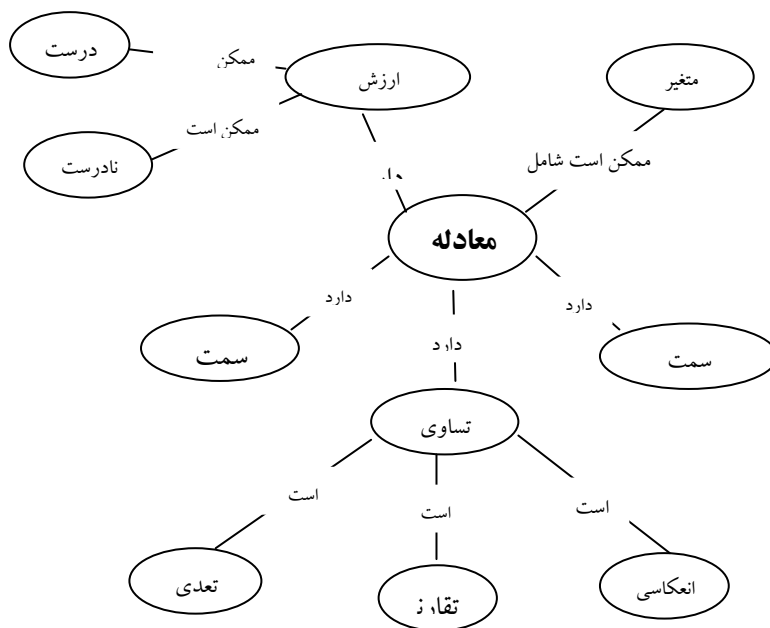
Keywords: first order equation, misconceptions, junior high school students.

چکیده: این مقاله با هدف شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه شهرستان پاکدشت در مبحث معادله درجه اول انجام گرفته است. در ریاضی و علوم دیگر دانش‌آموزان معادلات را تشکیل داده و حل می‌کنند و بدین سبب، لازم است دانش‌آموزان درک مناسبی از معادلات داشته باشند. از آنجایی که اشتباهات مفهومی بخشی از درک مفهومی دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهند و جزئی از فرآیند ساختن مفاهیم جدید و ارزیابی طرحواره‌های شخصی محسوب می‌شوند، می‌توانند به‌عنوان ابزار مفید آموزشی مورد توجه قرار گیرند. به‌منظور شناسایی اشتباهات، آزمونی طراحی و اجرا شد. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که دانش‌آموزان اشتباهات مفهومی متعددی در مبحث معادله از جمله تعریف معادله، نماد تساوی، متغیر، حل معادله، تبدیل مسائل کلامی به معادله و هم‌ارزی معادلات دارند. چنین اشتباهات مفهومی، می‌تواند مانعی برای یادگیری معادلات با درجه‌های بالاتر شود.

کلیدواژه‌ها: معادله درجه اول، اشتباهات مفهومی، دانش‌آموزان دوره اول متوسطه.

مقدمه

تاکنون تحقیقات محدودی در مورد دانش معلمان از جبر به‌عنوان موضوعی مهم در برنامه درسی یا برای توسعه استدلال جبری در دانش‌آموزان انجام شده است (اسکوئث^۱، ۲۰۰۷). از سوی دیگر، ایجاد درک مفهوم معادله در دانش‌آموزان مهم و ضروری است؛ بنابراین لازم است که تلاش‌هایی برای ایجاد درک مفهومی از معادلات انجام شود (توساوین^۲ و همکاران، ۲۰۱۱). مفهوم معادله از مفاهیم دیگری از جمله اعداد، عملگرهای محاسباتی، عبارات جبری، نماد تساوی و متغیر تشکیل می‌شود (اودیآ^۳، ۲۰۰۹). همچنین توساوین و همکاران (۲۰۱۱) نقشه مفهومی معادله را به‌صورت شکل ۱ ارائه می‌دهند. اگر هر یک از مفاهیم ظاهر شده در نقشه مفهومی به درستی در ذهن دانش‌آموزان شکل نگیرند، باعث ایجاد اشتباهات مفهومی گسترده در این مبحث می‌شود.



شکل ۱. نقشه مفهومی معادله

1. Asquith
2. Tossavainen
3. Evodia

اوزکان^۱ (۲۰۱۱) بیان می‌کند اشتباهات مفهومی، مفاهیمی هستند که دانش‌آموز تصور می‌کند درست هستند و به‌طور معمول از آن‌ها استفاده می‌کند. از دیدگاه ساخت و سازگرایان، اشتباهات مفهومی برای یاددهی و یادگیری بسیار بااهمیت هستند، زیرا اشتباهات مفهومی بخشی از ساختار مفهومی دانش‌آموز را تشکیل می‌دهند که با مفاهیم جدید در تعامل قرار خواهند گرفت و روی یادگیری جدید تأثیر منفی خواهند گذاشت (اولیویر^۲، ۱۹۹۲). به‌طورکلی اشتباه مفهومی، اشتباهی نیست که توسط معلم نادیده گرفته شود، بلکه دارای ساختار محکمی است که به‌سادگی تصحیح نمی‌شود. در واقع دانش‌آموزی که دارای اشتباهات مفهومی است، آن را فوراً نمی‌پذیرد و تغییر نمی‌دهد (کانسز^۳ و همکاران، ۲۰۱۱). بسیاری از دانش‌آموزان در رابطه با درک و حل معادله مشکلاتی دارند. بنابراین الزامی است که تحقیقاتی برای شناسایی و تحلیل اشتباهات دانش‌آموزان و معلمان در مراحل اولیه یادگیری و یاددهی جبر و معادلات انجام شود (اودیا، ۲۰۰۹).

پیشینه پژوهش

اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در مبحث معادله

- معادله و اشتباهات مفهومی آن

معادله به صورت یک تساوی که شامل چند متغیر (حرف) بوده و به ازای بعضی از مقادیری که به‌جای متغیرهای آن قرار گیرد درست، و به ازای بعضی مقادیر دیگر نادرست است، تعریف می‌شود. معادله را برحسب تعداد متغیرها و توان متغیرها نام‌گذاری می‌کنند. شکل کلی معادله درجه اول به صورت $ax + b = 0$ است که برحسب تعداد جواب‌ها، این معادله‌ها را «ممکن»، «غیرممکن» و «مبهم» می‌نامند. برای مثال $2x + 1 = 3$ یک معادله «ممکن» است، زیرا فقط یک جواب دارد. معادله $3(2x - 3) - 6x = 1$ یک معادله «غیرممکن» است، زیرا مجموعه جواب آن تهی است و معادله $3(2x - 1) - 6x = -3$ «مبهم» است چون مجموعه جواب آن‌همه اعداد حقیقی است (کرایه‌چیان، ۱۳۸۸). در کتاب‌های درسی معادلاتی که

مجموعه جواب آن همه اعداد حقیقی می‌باشد را اتحاد می‌نامند. یک «اتحاد» جمله‌ای است که برای همه مقادیر درست است، به جز مقادیری از متغیر که باعث می‌شود، معادله معنادار نشود.

برای مثال $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ یک اتحاد است (اودیا، ۲۰۰۹).

اکثر دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال «معادله را تعریف کنید» چنین می‌نویسند «معادله یک محاسبه ریاضی است» و یا «محاسبه‌ای است که برای پیدا کردن X انجام می‌شود». این تعاریف نشان می‌دهند که اکثر دانش‌آموزان معادله را به صورت یک محاسبه ریاضی، یا به عنوان محاسبه‌ای که برای پیدا کردن مقدار X لازم است در نظر می‌گیرند. علاوه بر این، دانش‌آموزانی که مجهول را به عنوان یک ویژگی مهم از معادله در نظر گرفته‌اند، هیچ‌کدام به صراحت نماد تساوی را ذکر نکرده‌اند. این عملکرد دانش‌آموزان معمولاً از تجارب قبلی آنان در ریاضی نشأت می‌گیرد، که به نظر این دانش‌آموزان نماد تساوی نشان‌دهنده لزوم محاسبات ریاضی است (لیما^۱ و تال^۲، ۲۰۰۶). اکثر دانش‌آموزان، معادله را «یک عبارت جبری که دارای متغیر است» معرفی کردند. این دانش‌آموزان عباراتی مانند $3X + 1$ و $X^2 + 5X + 6$ را به عنوان مثال‌هایی از معادله بیان کردند که نشان می‌دهد دانش‌آموزان، بین عبارات جبری و معادله تفاوتی قائل نمی‌شوند (برهمند، ۱۳۸۶). هم‌چنین واگنر^۳ و همکاران (۱۹۸۴) بیان می‌کنند که دانش‌آموزان به طور مکرر تلاش می‌کنند چندجمله‌ای‌ها را «حل کنند». کی‌یرن^۴ (۱۹۹۲) نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان زمانی که از آن‌ها خواسته می‌شود که چندجمله‌ای‌ها را ساده کنند عبارت «=۰» را به چندجمله‌ای‌ها اضافه می‌کنند (نقل شده در مامبا^۵، ۲۰۱۱).

برهمند (۱۳۸۶) نشان داد که اکثر دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال «یک معادله بسازید که جواب آن ۵ باشد»، از معادلاتی با عبارات طولانی مانند $2X = 10$ یا $X + 5 = 10$ استفاده کردند. نکته جالب این است که برخی دانش‌آموزان $X = 5$ را صحیح نمی‌دانستند و معتقد بودند که « $X = 5$ معادله نیست، زیرا مقدار X مشخص است». این در حالی بود که معادلات دیگری که آن‌ها ارائه کردند، پس از ساده شدن به $X = 5$ می‌رسید. یکی از دلایل این مطلب،

1. Lima
2. Tall
3. Wagner
4. Kieran
5. Mamba

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

این بود که بیشتر آن‌ها، معادله را متشکل از چند عبارت طولانی و حل آن را نیازمند طی یک یا چند مرحله برای رسیدن به جواب می‌دانستند.

- نماد تساوی و اشتباهات مفهومی آن

وجود نماد تساوی در همه سطوح ریاضیات نشان‌دهنده برجستگی و اهمیت آن است و شناخت این نماد برای درک بسیاری از موضوعات ریاضی مانند معادلات جبری ضروری است. درک دانش‌آموزان از مفاهیم جبری، متغیر و نماد تساوی روی موفقیت آن‌ها بر حل مسائل و استراتژی‌هایی که در فرآیندهای حل خود به کار می‌برند و توجیهاتی که برای حل خود ارائه می‌کنند، تأثیر می‌گذارد (نوٹ^۱ و همکاران، ۲۰۰۶). این‌که دانش‌آموزان از نماد تساوی، معانی «درک عملیاتی^۲» و «درک رابطه‌ای^۳» را فرا می‌گیرند سابقه طولانی دارد (برودی^۴ و شالم^۵، ۲۰۱۱). در دوره ابتدایی بسیاری از دانش‌آموزان نماد تساوی را به‌طور عملیاتی به‌عنوان نمادی که عملی را انجام می‌دهد تا جوابی را به‌دست می‌آورد، در نظر می‌گیرند (کی‌پرن، ۱۹۸۱). مک نیل^۶ و همکاران (۲۰۰۶) در دسته‌بندی معانی نماد تساوی معنی عملیاتی را به‌صورت «عملی که مساوی است با جواب» بیان می‌کند (نقل شده در پردیگر^۷، ۲۰۰۹).

درک رابطه‌ای به دانش‌آموز کمک می‌کند که بفهمد نماد تساوی یک رابطه هم‌ارزی (انعکاسی، تقارنی و تعدی) بین دو عبارت ریاضی است. بدین معنی که هر عبارت ریاضی A با خودش مساوی است (خاصیت انعکاسی). همچنین، اگر عبارت A با عبارت B مساوی باشد، آنگاه عبارت نیز با عبارت مساوی است (خاصیت تقارنی). به‌علاوه، اگر عبارت A با عبارت B و عبارت B با عبارت C مساوی باشد، آنگاه عبارت A نیز با عبارت C مساوی است (خاصیت تعدی). تعریف رابطه‌ای نماد تساوی که توسط یک دانش‌آموز نوشته شده بدین صورت است: «این نماد بدین معنی است که آنچه در سمت چپ و در سمت راست نماد تساوی قرار دارد، با

-
1. Knuth
 2. Operational
 3. Relational
 4. Brodie
 5. Shalem
 6. McNeil
 7. Prediger
 8. Arithmetic identities
 9. Formal equivalence
- ۷۵

هم برابر است» (نوٹ و همکاران، ۲۰۰۸). علاوه بر این، پرديگر (۲۰۰۹) در دسته‌بندی معانی نماد تساوی، پنج دسته معانی رابطه‌ای را مشخص می‌کند:

- اتحادهای عددی^۱ مانند $۱۹ = ۱۰^۲ - ۹^۲$

- اتحادهای جبری^۲ که برای همه مقادیر متغیر درست هستند مانند

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

- مشخص کردن مجهولات شرطی مانند حل $۳a = a + ۳$

- اتحادهای زمينه‌ای در فرمول، مانند $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

- تعاریف، مانند $m = \frac{1}{p}(a + b)$

هر کدام از این دسته‌ها درک متمایزی از متغیر و بنابراین تفاوت‌ها در مفهوم نماد تساوی را نشان می‌دهند. نوٹ و همکاران (۲۰۰۶) معتقدند درک رابطه‌ای از نماد تساوی نه فقط برای ایجاد و تفسیر معنادار معادلات لازم است بلکه برای انجام عملیات معنادار روی معادلات نیز ضروری است. این در حالی است که انتقال اساسی درک دانش‌آموزان از عملیاتی به رابطه‌ای و درک رابطه‌ای مربوط به حل معادله در دوره متوسطه وجود ندارد. بهر^۳ و همکاران (۱۹۷۶) به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان تصور می‌کنند نماد تساوی باید در عبارتی که نماد عملگر داشته باشد، قرار گیرد؛ بنابراین تساوی‌هایی مثل $۳ = ۳$ را به $۳ + ۰ = ۳$ تغییر دادند (نقل شده در ولدر^۴، ۲۰۱۰).

برودی و شالم (۲۰۱۱) بیان می‌کنند برخی از نشانه‌های درک عملیاتی که در مورد نماد تساوی به اشتباه رخ می‌دهند عبارت‌اند از:

• این‌که دانش‌آموزان در جای خالی رابطه $۵ + \dots + ۴ = ۱۲, ۸$ یا ۱۷ می‌نویسند.

• ادعای این‌که رابطه‌ای مثل $۱۵ = ۷ + ۸$ برعکس نوشته شده است و باید به صورت

$$۷ + ۸ = ۱۵$$

نوشته شود.

1. Conditional characterizing unknowns
2. Contextual identities
3 . Behr
4 . Welder

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

- مشکل داشتن با عبارات جبری باز، برای مثال $a + 3$ ، زیرا نماد تساوی وجود ندارد و دانش‌آموزان تمایل دارند که $a + 3 = 3a$ بنویسند.
- برخی از دانش‌آموزان از نماد تساوی (=) به جای نتیجه (\Rightarrow) استفاده می‌کنند که این همان درک عملیاتی نماد تساوی را نسبت به درک رابطه‌ای نشان می‌دهد مانند راه‌حل زیر:

$$p - 28 = 4 + 1$$

$$= p - 28 = 5$$

$$= p = 33$$

هم‌چنین وقتی که یکی از دانش‌آموزان معادله $5 = X + 3$ را حل کرد و به جواب $X = 2$ رسید، تعدادی از دانش‌آموزان اصرار داشتند که $2 = X$ نادرست است و باید به‌ضرورت $X = 2$ نوشته شود. آن‌ها تصور می‌کردند که X یک مؤلفه اصلی است و از همه جملات مهم‌تر است، پس باید اول نوشته شود. هم‌چنین، حسام (۱۳۸۴) نشان داد که برخی از دانش‌آموزان $X = 4$ را به $X = -4$ تبدیل می‌کنند. این مسئله نشان می‌دهد که دانش‌آموزان خاصیت تقارنی نماد تساوی را درک نکرده‌اند. توساوین و همکاران (۲۰۱۱) توضیح می‌دهند که دانش‌آموزان به‌راحتی معادلاتی مانند $X = X$ را به‌عنوان یک معادله در نظر می‌گیرند ولی معانی و ارزش ساختاری آن، شامل خاصیت انعکاسی نماد تساوی را نادیده گرفته و معادله را با انجام عملیات جبری و تبدیل به‌صورت معادله $0 = 0$ برای خود پیچیده کرده و بنابراین نمی‌توانند تشخیص دهند که جواب آن‌همه اعداد حقیقی است.

- اشتباهات مفهومی مربوط به متغیر

متغیر یک مفهوم اساسی است که در برنامه درسی ریاضی جایگاه مهمی دارد. شکل‌های مختلفی از بازنمایی‌های آن وجود دارد و به‌طور کلی به‌وسیله نمادهای حرفی نمایش داده می‌شوند؛ زیرا این نمادها برای نوشتن، خواندن، فهمیدن و مقایسه آن‌ها با نمادهای دیگر، آسان‌تر و کاربردی‌تر هستند (سahین^۱ و سویلو^۲، ۲۰۱۱).

1 . Sahin

2 . Soylyu

مامبا (۲۰۱۱) نشان داد برخی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند که جملات مختلف در یک معادله، اعداد مختلفی را نمایش می‌دهند. مثلاً یکی از دانش‌آموزان گزینه الف و ب را در مسئله زیر به‌عنوان گزینه‌های درست انتخاب کرده و توضیح داد که X و Y دو حرف مختلف هستند پس دو مقدار مختلف را باید به آن‌ها اختصاص داد تا جمع آن‌ها ۱۶ شود و لذا گزینه (ج) نادرست است.

"جان برای حل مسئله «مقدار X و Y را در معادله $X + Y = 16$ پیدا کنید». جواب‌های زیر را ارائه داد:

الف) ۶ و ۱۰ ب) ۹ و ۷ ج) ۸ و ۸

کدام‌یک از این جواب‌ها درست است توضیح دهید."

سahین و سویلو (۲۰۱۱) نشان دادند که وقتی از دانش‌آموزان خواسته شد حاصل عبارت $4X + 9X$ را به‌دست آورند، تقریباً نیمی از دانش‌آموزان عبارت $4X + 9X = 13$ را به‌جای $4X + 9X = 13X$ نوشتند. اشتباهات آن‌ها از نوع «چشم پوشی متغیر» بود بدین معنی که متغیر X نادیده گرفته شده بود.

- اشتباهات مفهومی مربوط به حل معادله

برای حل معادلاتی مانند $4X - 2 = X - 1$ برخی از دانش‌آموزان، زمانی که جملات را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنند، فراموش می‌کنند که علامت جملات را تغییر دهند، یا عملیات اشتباه روی جملات به‌کار می‌برند. این نوع اشتباه در حل معادلات جبری بسیار رایج است. دلیل اصلی آن، فقدان درک ویژگی‌های ساختاری پایه‌ای از جبر مانند ویژگی‌های یک عبارت جبری می‌باشد. حتی اگر آن‌ها این ویژگی‌ها را درک کنند، گاهی دانش‌آموزان، این اشتباهات را ندانسته انجام می‌دهند (اگادوات^۱، ۲۰۱۱). هال^۲ (۲۰۰۲) و مامبا (۲۰۱۱) نمونه‌ای بارز از این اشتباهات که برگرفته از راه حل یک دانش‌آموز است به‌صورت زیر مطرح می‌کنند:

$$4X - 2 = X - 1$$

$$4X + X = -1 - 2$$

1. Egodawatte
2. Hall

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

برای حل معادلاتی مانند $2X = 4$ ، باید از ویژگی‌های موازنه کردن معادله به‌خصوص ویژگی‌های ضرب و تقسیم استفاده کرد؛ یعنی باید طرفین را بر ۲ تقسیم کرده و حاصل را به‌دست آورد ($2X = 4 \Rightarrow X = 2$). درحالی‌که برخی به‌جای استفاده از این روش از روش معلوم-مجهول استفاده می‌کنند و جواب‌های

$$(a) X = 4 - 2 \qquad (b) X = \frac{4}{-2} \qquad (c) X = \frac{2}{4}$$

را به‌دست می‌آورند. دانش‌آموزانی که جواب (a) را به‌دست آورده‌اند، ضریب X را به‌طرف دیگر جابه‌جا کرده و علامتش را تغییر داده‌اند. در (b)، ضریب X را به‌درستی جابه‌جا کرده و در مخرج قرار داده، ولی علامت آن را تغییر داده‌اند و در (c)، ضریب X را جابه‌جا کرده و در مخرج آن ۴ قرار داده یعنی جای صورت و مخرج را جابه‌جا نوشته‌اند. این مسئله استفاده نادرست از روش‌های رویه‌ای را که ممکن است از یادآوری غلط ناشی شده و منجر به طیف وسیعی از اشتباهات گردد، نشان می‌دهد (لیما و تال، ۲۰۱۰؛ مامبا، ۲۰۱۱ و آگاداوات، ۲۰۱۱).
هال (۲۰۰۲) این خطا را در مواجهه با معادلاتی که شامل یک مخرج هستند، پیدا کرد. برای نمونه:

$$5 + \frac{X}{2} = 2$$

$$5 + X = 4$$

$$X = -1$$

در این مورد، دانش‌آموزان قانون‌هایی که اغلب در حل معادلات ساده‌ای مانند $\frac{X}{2} = 3$

به‌کار می‌برند را به‌طور نامناسب برای حل معادلات پیچیده‌تر تعمیم می‌دهند. وقتی دانش‌آموزان بدون دانستن مفهوم معادله به حل آن بپردازند، از روش‌های رویه‌ای در موقعیت‌های به‌ظاهر یکسان استفاده می‌کنند و معمولاً جواب نهایی را چک نکرده و لذا متوجه نمی‌شوند که نتیجه نادرستی به دست آورده‌اند.

برای حل معادله $2m = 4m$ فقط تعداد محدودی از دانش‌آموزان جواب درست $m = 0$ را به‌دست آورده و بیان کردند که اگر $m = 0$ را در معادله جایگزین کنیم، صدق

می‌کند. برخی از دانش‌آموزان صدق کردن جواب به‌دست آمده را، در معادله بررسی نکرده و بیشتر تمایل به استفاده از روش معلوم - مجهول یعنی جابه‌جا کردن نمادها و اعداد بدون دقت کافی دارند (لیما و تال، ۲۰۰۸).

- اشتباهات مفهومی مربوط به مسائل کلامی

بیشاپ^۱ و همکاران (۲۰۰۸) بیان می‌کنند در مسائل کلامی زمانی که دانش‌آموزان باید بخوانند، تفسیر کنند و کلمات انگلیسی را به زبان جبری تبدیل کنند، غالباً خطاهای "به اشتباه خواندن" و "به اشتباه تفسیر کردن" را انجام می‌دهند و فراوانی رخداد این خطاها بسیار زیاد است. یکی از دلایل این مشکل در تبدیل بیان کلامی به جبر و برعکس، از آموزش اولیه ناشی می‌شود.

محققانی مانند شونفلد^۲ (۱۹۸۵)، استیسی^۳ و مک‌گریگور^۴ (۱۹۹۷)، هال (۲۰۰۲) و تال (۲۰۰۸)، توانایی دانش‌آموزان را در تفسیر مسائل کلامی به‌صورت نمادهای ریاضی بررسی کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که اکثر دانش‌آموزان زمانی که کلمات را به‌صورت نمادهای ریاضی تغییر می‌دهند رویکرد «نوشتن نمادها به ترتیب کلمات ظاهرشده در جملات کلامی» را به‌کار می‌برند. شونفلد (۱۹۸۵) مسئله دانشجویان و استادان را به تفصیل مورد بررسی قرار داده است. در این مسئله بیان شده که در یک دانشکده، تعداد دانشجویان، ۶ برابر تعداد اساتید است، این اطلاعات را به‌صورت یک معادله ریاضی بنویسید. برخی پاسخ‌دهندگان با انتخاب نماد S برای تعداد دانشجویان و نماد p برای تعداد اساتید، معادله $6s = p$ را به‌جای $s = 6p$ نوشتند. تال (۲۰۰۸) و ولدر (۲۰۱۰) نیز این مسئله را بررسی کرده و به نتایج مشابهی دست یافته‌اند. استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۳) در مطالعه‌ای بر روی ۲۸۱ دانش‌آموز پایه نهم، سؤال «عبارت Z برابر است با جمع y و 3 ، را به‌صورت نماد ریاضی بنویسید.» را مطرح کردند. پاسخ عمده دانش‌آموزان به‌صورت $Z = 3y$ و $3y = Z$ بود، که نشان‌دهنده این مطلب است که نوشتن عدد و متغیر کنار هم به‌صورت حاصل‌ضرب را به‌عنوان جمع عدد و متغیر در نظر می‌گیرند.

1. Bishop
2. Shoenfeld
3. Stacey
4. McGregor

سؤال پژوهش

بررسی پیشینه پژوهشی در این موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان اشتباهات متعددی در رابطه با مفهوم معادله و حل آن دارند؛ بنابراین به‌منظور شناسایی این اشتباهات، سؤال این پژوهش عبارت است از: «اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در مبحث معادله درجه اول، کدامند؟»

روش پژوهش

جامعه، نمونه و فرآیند تهیه آزمون

این پژوهش به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام شده است. جامعه آماری پژوهش، کلیه دانش‌آموزان سال اول دوره متوسطه شهرستان پاکدشت در سال تحصیلی ۹۱-۹۰ است. پس از مطالعه مبانی نظری، کتب درسی، نظر اساتید و دبیران ریاضی، اهداف آموزشی معادله درجه اول تنظیم گردید. این اهداف در سه بخش عملیات جبری ساده کردن، معادله درجه اول و معادلات هم‌ارز دسته‌بندی و ۴۵ سؤال چهارگزینه‌ای طرح گردید. در مطالعه مقدماتی^۱ ۳۰ نفر از دانش‌آموزان سال اول دوره متوسطه شهرستان پاکدشت، مورد آزمون قرار گرفتند. با استفاده از ضریب دشواری، ضریب تمیز و ضریب هماهنگی درونی سؤالات، ۱۹ سؤال نامناسب حذف گردید و آزمونی شامل ۲۶ سؤال با مقدار آلفای کرونباخ (۰/۸۷۲) باقی ماند که نشان دهنده پایایی و انطباق سؤالات طرح شده با اهداف آموزشی است. برای تعیین روایی صوری و تأیید اینکه «آیا سؤالات طرح شده برای سنجیدن اهداف مورد نظر مناسب هستند یا خیر؟» از نظر ۵ نفر از اساتید ریاضی و ۴ دبیر ریاضی استفاده شد. با استفاده از نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای ۱۲۷ دانش‌آموز سال اول دوره متوسطه شهرستان پاکدشت انتخاب و در آزمون نهایی شرکت کردند.

یافته‌های پژوهش

با توجه به اینکه مفاهیم موردنظر در مبحث معادله درجه اول کتاب ریاضیات (۱) دوره متوسطه به‌صورت زیر هستند، اشتباهات مفهومی مشاهده شده دانش‌آموزان در حل تشریحی سؤالات آزمون برای هر یک از مفاهیم مشخص گردید.



ویژگی‌های مربوط به اشتباهات در هر یک از مفاهیم فوق به همراه نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در جدول‌های ۱ تا ۶ آمده است.

جدول ۱. اشتباهات مفهومی در تعریف معادله

فرآوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۳۴	تعریف معادله را به صورت «یک عبارت جبری شامل تساوی و X است.» نوشتند.	متغیر X را به‌عنوان تنها مجهول معادله در نظر گرفته‌اند.
۲۹	$x = 5$ را به‌عنوان یک معادله در نظر نگرفته‌اند؛ زیرا مجهول آن مشخص است.	نباید مقدار عددی مجهول مشخص باشد.
۲۲	پس از حل $3a = 3a$ به صورت $3a - 3a = 0$ نتیجه گرفتند که a مقدار ندارد. بنابراین معادله نیست.	یک معادله حتماً باید جواب داشته باشد.
۷۹	« $= 0$ » را جلوی $3x - 4 + x$ قرار داده و آن را به‌عنوان یک معادله پذیرفتند.	بین عبارات جبری و معادله تفاوتی قائل نیستند.
۲۸	$3a = 3a$ را که یک معادله مبهم [اتحاد] است، معادله تصور نمی‌کنند.	اتحاد را به‌عنوان یک معادله نمی‌پذیرند.
۶۷	برخی از دانش‌آموزان عبارت $X = b$ را به‌عنوان شکل کلی معادله درجه اول ذکر کردند.	شکل کلی معادله درجه اول را به‌اشتباه درک کرده‌اند.
۴۳/۱۶		میانگین
٪۳۳/۹۸		درصد

جدول ۲. اشتباهات مفهومی در نماد تساوی

فرآوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۱۰۲	با استفاده از خاصیت انعکاسی می‌توانستند جواب معادله را تشخیص دهند، بدون اینکه از راه‌حل رویه‌ای زیر استفاده کنند. $5x = 5x \Rightarrow 5x - 5x = 0 \Rightarrow 0 = 0$	خاصیت انعکاسی نماد تساوی در معادله
۷۶	در حل معادله $-10 = 3x + 2$ ، مشاهده شد که آن‌ها وقتی پاسخ $x = -4$ را به دست آوردند گزینه $-4 = x$ را به‌عنوان جواب در نظر نگرفتند و بالعکس.	خاصیت تقارنی نماد تساوی در معادله
۴۸	$b - k = b - k = b - b = -k + k = 0$ از نماد تساوی (=) به‌جای نتیجه (\Rightarrow) استفاده کرده‌اند.	درک عملیاتی نماد تساوی در معادله
۷۵/۳۳		میانگین
۵۹/۳۱٪		درصد

جدول ۳. اشتباهات مفهومی در متغیر

فرآوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۱۵	در پاسخ به «سینا و چهار دوستش می‌خواهند یک توپ بسکتبال به قیمت ۱۵۰۰۰ تومان بخرند. اگر سینا ۵۰۰۰ تومان و بقیه به‌طور مساوی پرداخت کرده باشند. برای محاسبه سهم هر یک از دوستان سینا از کدام معادله استفاده می‌کنید؟» متغیر S را به‌عنوان مخفف کلمه سینا در نظر گرفتند و نوشتند: $S + 4 + 5000 = 15000$	درک متغیر به‌عنوان مخفف کلمه نه یک عدد دلخواه
۱۹	برای اثبات درستی $a - k = b - k$ دانش‌آموزی $a = 2$ ، $b = 2$ و $k = 3$ در نظر گرفت و نوشت $2 - 3 = 2 - 3$. پس تساوی برقرار است.	تخصیص و جایگزینی تعدادی اعداد خاص به‌جای متغیر
۵۰	برخی از دانش‌آموزان متغیر x را در $6x - 2 = 0$ نادیده گرفته و ۲ را از ۶ (ضریب x) کم کرده‌اند و $x = 4$ را به دست آورده‌اند.	در نظر گرفتن جملات مختلف به‌عنوان جملات مشابه
۲۸		میانگین
۲۲/۰۴٪		درصد

جدول ۴. اشتباهات مفهومی در حل معادله

فراوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۵۸	$-2x = 1 \Rightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2$	تبدیل $ax = b$ به یا $x = b - a$ یا $x = \frac{a}{b}$ یا $x = b + a$ $x = \frac{b}{-a}$
۴۵	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Rightarrow 9x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{9}$	تغییر مکان اعداد یا جملات بدون تغییر علامت آن
۹۶	در معادله $6m = 2m$ ، m را حذف کرده و رابطه $6 = 2$ را به دست آوردند.	عدم آگاهی از اینکه در ساده کردن جبری، ممکن است برخی ریشه‌های معادله حذف شوند.
۴۹	$5 + \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow 5 + \frac{x}{2} = -4 \Rightarrow 5 + x = 8$	تعمیم قانون طرفین - وسطین برای حل معادلات کسری
۶۲		میانگین
٪۴۸/۸۱		درصد

جدول ۵. اشتباهات مفهومی در تبدیل مسائل کلامی

فراوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۱۰۲	برای بیان کلامی معادله $n = 6n - 4$ ، گزینه «یک عدد برابر است با تفاضل شش برابر آن عدد از چهار» را انتخاب کردند.	در تبدیل جملات کلامی به ریاضی و برعکس، ترتیب عملیات را رعایت نمی‌کنند.
۶۱	انتخاب پاسخ $30 = x + 12x$ برای سؤال «در یک انجمن که ۳۰ عضو دارد، تعداد دانش‌آموزان دختر ۱۲ نفر بیش‌تر از دانش‌آموزان پسر است. کدام گزینه معادله تعداد پسران عضو این انجمن را نشان می‌دهد؟».	تمام اطلاعات مسئله را در معادله به کار می‌برند، بدون این‌که مسئله را بفهمند.
۴۶	برای پاسخ به «اگر ۵ را به طول ضلع مربعی اضافه کنیم و حاصل برابر ۳ شود» طول ضلع مربع را ۲- در نظر گرفتند بدون توجه به اینکه هیچ مربعی با این ضلع وجود ندارد.	جواب حاصل را برای دنیای واقعی تفسیر نمی‌کنند.
۶۹/۶۶		میانگین
٪۵۴/۸۵		درصد

جدول ۶. اشتباهات مفهومی در هم‌ارزی معادلات

فرآوانی	نمونه‌ای از پاسخ دانش‌آموزان	ویژگی
۷۸	برای شناسایی هم‌ارزی دو معادله $3X - 1 = X + 4$ و $4 - X + 4 = 3X - 1$ ، به حل رویه‌ای دو معادله پرداختند.	عدم انجام عملگرهای یکسان در دو طرف معادله.
۴۱	دو معادله $2X - 6 = 12$ و $2X + 6 = 12$ را به دلیل تشابه شکل ظاهری آن‌ها هم‌ارز می‌دانند.	دانش‌آموزان مفهوم هم‌ارزی دو معادله را با تشابه شکل ظاهری معادلات اشتباه گرفته‌اند.
۲۴	دو معادله $2X - 6 = 12$ و $2m - 6 = 12$ را هم‌ارز تصور نمی‌کنند.	اگر نوع متغیر تغییر کند، دو معادله هم‌ارز نیستند.
۴۷/۶۶		میانگین
۳۷/۵۲٪		درصد

نتیجه‌گیری

اشتباهات مفهومی، نتیجه تلاش دانش‌آموزان برای درک یک مفهوم هستند. بنابراین هر دانش‌آموزی در هر سن و سطح آموزش دارای انواعی از اشتباهات مفهومی است (موری^۱ و همکاران، ۱۹۹۰). از سوی دیگر اشتباهات مفهومی بسیار قوی و ماندگار هستند و ساختار محکمی دارند که به‌سادگی اصلاح نمی‌شوند. ولدر (۲۰۱۰) معتقد است که تصحیح اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان، حتی برای بهترین معلمان جبر، مشکل خواهد بود زیرا آن‌ها طی سال‌ها آموزش ریاضی قبلی، درونی شده‌اند. بنابراین به‌جای تمرکز روی تصحیح اشتباهات مفهومی موجود، بهتر است معلمان از تشکیل آن‌ها جلوگیری نمایند. اولین گام برای جلوگیری از ایجاد اشتباهات مفهومی، شناخت آن‌ها است. آگاهی از اشتباهات ریاضی دانش‌آموزان، یکی از مؤلفه‌های دانش محتوایی پداگوژیکی است که جایگاه مهمی برای تشکیل دانش محتوایی ریاضی دارد (دورکایا^۲، ۲۰۱۱). به‌علاوه، بوث^۳ و همکاران (۲۰۱۳) نشان دادند که ارائه

مثال‌هایی که شامل اشتباهات مفهومی باشند چه به تنهایی و یا در ترکیب با مثال‌های ساده‌تر، ممکن است برای بهبود درک مفهومی دانش‌آموزان و مهارت رویه‌ای آن‌ها در جبر مفید باشد. شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در این تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان درک مفهومی ناقصی از معادله و ویژگی‌های آن دارند. بر اساس نتایج این پژوهش، اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان را به ۶ دسته می‌توان تقسیم کرد که عبارت‌اند از: ۱- اشتباهات مفهومی در تعریف معادله ۲- اشتباهات مفهومی در نماد تساوی ۳- اشتباهات مفهومی در حل معادله ۴- اشتباهات مفهومی در متغیر ۵- اشتباهات مفهومی در تبدیل مسائل کلامی و ۶- اشتباهات مفهومی در هم‌ارزی معادلات.

نتایج حاکی از آن است که عمده‌ترین اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در زمینه «نماد تساوی» و ویژگی‌های آن از جمله درک عملیاتی و درک رابطه‌ای است که خود شامل خاصیت انعکاسی و تقارنی نماد تساوی می‌باشد. عدم درک مفهومی این ویژگی‌ها سبب می‌شود که دانش‌آموزان نتوانند به درستی معادلات را حل کنند. کی‌یرن (۱۹۸۱) معتقد است برای این که دانش‌آموزان مفاهیم عملیاتی و رابطه‌ای نماد تساوی را در جبر برای خود بسازند، بهتر است این مفاهیم قبل از آموزش جبر، زمانی که آن‌ها با تساوی‌های حسابی کار می‌کنند، ساخته شوند. اگر این مفاهیم در دانش حسابی دانش‌آموزان ساخته شود، آن‌ها می‌توانند درک شهودی از مفاهیم معادله را توسعه داده و به تدریج درک خود را به سمت آنچه برای جبر لازم است، ارتقاء دهند. همچنین استفنس^۱ و همکاران (۲۰۱۳) بیان می‌کنند به دلیل این که جبر اولیه^۲ تلاش می‌کند که درک عملیاتی نماد تساوی را برجسته کند، تکالیفی را ارائه می‌دهند که به کمک آن دانش‌آموزان را وادار به تفکر درباره معادلات و ساختار آن در آغاز تجارب جبری اولیه خود کنند. این نوع جبر روی استدلال دانش‌آموزان، شناسایی روابط بین مفاهیم و تعمیم بخشی به این روابط تمرکز می‌کند. یاددهی جبر اولیه نقش مهمی در ریاضیات تخصصی ایفا می‌کند، مفاهیم جبری را برای دانش‌آموزان ملموس‌تر ساخته و فرصت یادگیری مفاهیم بیشتری به‌طور همزمان فراهم می‌کند (موری، ۲۰۱۰). در پژوهش حاضر، بررسی کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی و متوسطه در ایران نشان داد که تمرکز و توجه کافی روی نماد تساوی وجود ندارد و مبحثی با موضوع نماد تساوی

3. Stephens

4. Early Algebra

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

و مفاهیم آن در این کتاب‌ها موجود نیست. بلکه بیشتر روی جنبه‌های صوری این نماد تأکید شده است.

این پژوهش نشان داد که اغلب دانش‌آموزان «تعریف معادله» را به درستی نمی‌توانند ارائه کنند. آن‌ها به جای یک تعریف رسمی، تصور مفهومی خود را از آن توضیح می‌دهند. در تصور آن‌ها اشتباهات مفهومی زیادی وجود داشت که در جدول ۱ ذکر شد. این اشتباهات مفهومی به این دلیل است که در کتاب‌های درسی ریاضی، نه تنها در دوره راهنمایی بلکه در دوره متوسطه نیز تعریف دقیقی از معادله ذکر نشده است. در ریاضیات (۱) دوره متوسطه، به معادله درجه اول به عنوان معادله‌ای که دارای مجهول است، اشاره شده و شکل کلی معادله درجه اول به صورت $ax + b = 0$ که ($a \neq 0$) معرفی شده است. این در صورتی است که دانش‌آموزان در حل برخی مسائل، به معادلاتی برخورد خواهند کرد که $a = 0$ خواهد بود و باید قادر به درک آن باشند. همچنین در این کتاب، اتحاد به صورت «تساوی‌های همیشه درست»، تعریف شده است، اما بحثی در مورد این که اتحاد یک نوع معادله است و یا به ارتباط بین اتحاد و معادله اشاره‌ای نشده است. می‌توان نتیجه گرفت، بسیاری از اشتباهات مفهومی مربوط به تعریف معادله که توسط اغلب دانش‌آموزان و حتی معلمان انجام می‌شود، وابسته به درک رویه‌ای آن‌ها از این مفهوم است.

اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در «حل معادله» بسیار رایج است. صرف‌نظر از این که این اشتباهات ممکن است بر اثر بی‌دقتی به وجود آید، بیشتر به دلیل عدم درک مفهومی معادله ایجاد می‌شوند. در ریاضیات (۱)، ابتدا از ترازو به عنوان یک بستر واقعی برای درک مفهوم معادله استفاده شده است. توصیف ریاضی وضعیت‌هایی که ترازو در حال تعادل است، به عنوان روش اصلی برای درک این مفهوم در نظر گرفته شده است. همچنین عملیات جبری ساده روی معادلات از طریق عملیاتی روی ترازو توجیه شده‌اند. بر همین اساس، آنچه که در سمت چپ تساوی انجام شود، باید در سمت راست تساوی نیز انجام شود تا توازن ایجاد شود. این رویکرد در واقع فرآیندهای حل معادله را معنادار می‌کند و در نتیجه دانش‌آموز تعدادی تبدیلات و انتقالات معنادار را انجام می‌دهد. مثال‌های ذکر شده در کتاب نیز به همین روش حل شده‌اند. اما بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از دانش‌آموزان این روش را برای حل استفاده نکرده‌اند و روش رویه‌ای معلوم - مجهول را به کار برده‌اند. به علاوه، درک محدود آن‌ها از انجام

عملگرهای یکسان در دو طرف معادله نیز این نتیجه را تأیید می‌کند. علی‌رغم این که محتوای کتاب درسی بر پایه همین روش است، آن‌ها هنوز بر این روش مسلط نیستند. این مسئله می‌تواند به این دلیل باشد که معلمان بر این روش تأکید نکرده‌اند و معادلات را از راه رویه‌ای معلوم - مجهول حل کرده‌اند و این روش را به دانش‌آموز منتقل کرده‌اند. بنابراین دانش‌آموزان در حل معادله تعدادی اعمال بی‌دلیل را انجام می‌دهند. مثلاً نمی‌دانند وقتی یک عدد از سمت چپ به راست منتقل می‌شود، چرا باید علامت آن تغییر کند و حتی اگر آن‌ها همه مراحل را به‌درستی انجام دهند، درک واقعی از محاسبات خود ندارند. به‌همین دلیل است که آن‌ها نمی‌توانند تشخیص دهند که در فرآیند حل معادله، تعدادی معادلات هم‌ارز به دست می‌آیند و نیز در شناسایی معادلات هم‌ارز ناتوان هستند. از آنجا که برای محاسبات خود استدلالی ندارند، امکان انجام اشتباه در آن افزایش می‌یابد. پس می‌توان نتیجه گرفت علت این دسته اشتباهات مفهومی، ضعف در یاددهی معلمان است.

مفهوم «متغیر» یکی از دانش‌های مفهومی پیش‌نیاز معادله است که فقدان آن منجر به ایجاد برخی اشتباهات مفهومی در معادله برای دانش‌آموزان می‌شود. لذا یاددهی صحیح این مفهوم قبل از مفهوم معادله از ایجاد این نوع اشتباهات جلوگیری خواهد کرد. مانند تأکید بر این که هر تغییری یک عدد دلخواه را نشان می‌دهد؛ و این که می‌توان آن را با هر حرفی نه فقط **X** نمایش داد، و تمرین و دست‌ورزی بیشتر با عبارات جبری.

دانش‌آموزان در «تشکیل معادله» از روی مفروضات مسئله کلامی بیش از فرآیند حل معادله مشکل دارند. هوارد^۱ (۲۰۰۳) معتقد است قبل از این که دانش‌آموزان در تبدیل مسائل کلامی به معادلات موفق شوند، آن‌ها ابتدا باید درک کاملی از نمادسازی جبری داشته باشند. هم‌چنین زمانی که افراد درباره قوانین جبری شامل ترتیب عملیات مهارت داشته باشند، مشکلات آن‌ها در تبدیل مسائل کلامی به شکل نمادین کاهش می‌یابد.

پیشنهادات

- برای پیش‌گیری و تصحیح اشتباهات مفهومی نماد تساوی، پیشنهاد می‌شود که معلمان بر مفاهیم نماد تساوی و نقش آن در یک معادله و ویژگی‌های هم‌ارزی آن در کلاس درس تأکید

شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در معادله درجه اول

کنند. طراحی تکالیف دقیق، شامل مفاهیم عملیاتی و رابطه‌ای، به درک عمیق نماد تساوی و در پی آن مفهوم معادله کمک می‌کند.

– از آنجا که تعریف مفاهیم ریاضی، نقش اساسی در مرحله کاربرد آن در زمینه‌های مختلف ایفا می‌کند، پیشنهاد می‌شود، دبیران ریاضی هنگام تدریس، توجه ویژه‌ای به تعاریف مفاهیم داشته باشند. لازم به ذکر است که مؤلفان و برنامه‌ریزان درسی نیز می‌توانند با در نظر گرفتن یک تعریف کامل و جامع از مفهوم معادله در کتاب‌های درسی، و هم‌چنین بیان اتحاد و معادله به‌طور هم‌زمان و تأکید بر شباهت و تفاوت آن‌ها، اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در این مبحث را کاهش داده و بدین وسیله دانش‌آموزان را در درک صحیح این مفهوم یاری رسانند.

– در تحقیق اندروز و سایرین^۱ (۲۰۱۲) معلمان با اطمینان از شکست یادهی روش‌های رویه‌ای، روش توازن را به‌عنوان یک تجسم برای روش‌های حل معادلات جبری معرفی کردند. بنابراین می‌توان با تأکید بر روش موازنه در حل معادله از این نوع اشتباهات مفهومی جلوگیری کرد.

– اگر در کتاب‌های درسی ریاضی، بعد از حل هر معادله بر انجام بازبینی جواب تأکید شود، دانش‌آموزان برای تصحیح اشتباهات خود در حل معادله و هم‌چنین برای تشخیص جواب معادلات غیرممکن و مبهم توانا تر خواهند شد. در نتیجه، اشتباهات مفهومی آن‌ها در تفاوت ساده کردن جبری و ساده کردن عددی، یعنی «زمانی که مجهول را حذف می‌کنند در حالی که ریشه معادله است»، با انجام مرحله بازبینی اتفاق نمی‌افتد.

منابع

برهمنده، علی (۱۳۸۶). درک دانش‌آموزان از معادله درجه اول و مشکلات دانش‌آموزان در رابطه با حل آن. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.

حسام، عبدالله (۱۳۸۴). بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان و نقش طرحواره‌های ذهنی در ایجاد آن‌ها. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.

کرایه‌چیان، محمدعلی (۱۳۸۸). *ریاضیات مقدماتی*. انتشارات آهنگ قلم، مشهد.

- Andrews, P. & Sayers, J. (2012). Teaching Linear Equations: Case Studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(4), 476-488.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Journal of Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.
- Bishop, A., Filloy, E. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. Boston, MA, USA: *Springer*.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goal, Handbook1 Cognitive Domain*, David McKay Company, New York.
- Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R. & Newton, K. J. (2013). Using Example Problems to Improve Student Learning in Algebra: Differentiating between Correct and Incorrect Examples. *Learning and Instruction*. 25, 24-34.
- Brodie, K. & Shalem, Y. (2011). *Accountability Conversations: Mathematics Teachers' Learning through Challenge and Solidarity*, Springer *Science+Business Media B. V.*
- Cansiz, S., Kucuk, B. & Isleyen, T. (2011). Identifying the Secondary School Students' Misconceptions about Functions, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, Turkey, 15, 3837-3842.
- Durkaya. M., Aksu. Z., Ocal . M. F., Senel . E. O., Konyalioglu. A.C., Hizarci. S. & Kaplan. A. (2011). Secondary School Mathematics Teachers' Approaches to Students' Possible Mistakes. Elsevier Ltd.Wolfram MathWorld. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15, 2569-2573.
- Egodawatte, G. (2011). Secondary School Students' Misconceptions in Algebra, *Department of Curriculum, Teaching and Learning*, University of Toronto. accessed 5/2/2012.
- Evodia, N. M. M. (2009). An Investigation into the Problems Encountered by Learners and Teachers of Grade 9 Algebra on Understanding Linear Equations: a Critical Analysis. *Educational Studies*. Accessed 3/2/2012, <http://hdl.handle.net/10500/2509>.
- Hall, R. D. G. (2002). An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations, *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 15.

- Hubbard, R. (2003). An Investigation into the Modelling of Word Problems Leading to Algebraic Equations. The Mathematics Education into the 21st Century Project. *Proceedings of the International Conference*. The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. & Stephens, A. C. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297–312.
- Lima, R. N. de. & Tall, D. (2006). The Concept of Equations: What have Students Met Before. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague, Czech Republic, 4, 233–241.
- Lima, R. N. de. & Tall, D. (2008). Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations, PUC/SP – Brazil. *Educational Studies in Mathematics*. 67(1) 3-18.
- Lima, R. N. de. & Tall, D. (2010). An Example of the Fragility of a Procedural Approach to Solving Equations. UNIBAN – Brazil. accessed 15/3/2012. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>.
- Mamba, F, T. (2011). An Investigation into Students' Misconceptions in Linear Equations in Public Secondary Schools of Malawi: The Case of the South Eastern Education Division, Hiroshima University, Japan. accessed 3/3/2012, <http://home.hiroshima-u.ac.jp>.
- Murray, T., Schultz, K., Brown D. & Clement, J. (1990). An Analogy-Based Computer Tutor for Remediating Physics Misconceptions, *Interactive Learning Environments*, 1 (2), 79-101.
- Murray, M, K. (2010). Early Algebra and Mathematics Specialists, *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations*, 12, 73 – 81.
- Murray, T., Schultz, K., Brown D. & Clement, J. (1990). An Analogy-Based Computer Tutor for Remediating Physics Misconceptions, *Interactive Learning Environments*, 1(2), 79-101.
- Olivier, A. (1992). Handling Pupils' Misconceptions. In M. Moodley, R.A. Njisani & N. Presmeg (Eds), *Mathematics Education for Pre-Service and In-Service Pietermaritzburg: Shuter & Shooter*. 193-209.

- Ozkan, E. M. (2011). Misconceptions in Radicals in High School Mathematics, Elsevier Ltd. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 120–127.
- Prediger, S. (2009). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign, *Journal for Mathematics Teacher Education*, Published online.
- Sahin, O. & Soylu, Y. (2011). Mistakes and Misconceptions of Elementary School Students about the Concept of Variable, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 3322–3327.
- Shoenfeld. A. H. (1985). Mathematical Problem Solving, School of Education, *Department of Mathematics*, University of California Berkely, California.
- Stacey, K. & McGregor, M. (1993). Origins of Students' Errors in Writing Equations. *Institute of Education*, University of Melbourne, Australia.
- Stacey, K. & McGregor, M. (1997). Ideas about Symbolism that Students bring to Algebra. *Mathematics Teacher*, 90, 110-113.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M. & Marum, T. (2013). Equation Structure and the Meaning of the Equal Sign: The Impact of Task Selection in Eliciting Elementary Students' Understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 173-182.
- Tall, D. (2008). The Historical & Individual Development of Mathematical Thinking: Ideas that are Set-Before and Met-Before. University of Warwick – UK. Plenary presented at Colóquio de História e Tecnologia no Ensino Da Matemática.UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil. Accessed 7/2/2012. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>.
- Tossavainen, T., Atorps, I., Vaisanen, P. (2011). On Mathematics Students Understanding of the Equation Concept. *Journal of Mathematical Education*, 6(2), 127-147.
- Wagner, S., Rachlin, S. L. & Jensen, R. J. (1984). Algebra Learning Project: Find Report. Athens. USA: University of Georgia, *Department of Mathematics Education*.
- Welder, B. A. (2010). Improving Algebra Preparation: Implications from Research on Student Misconceptions and Difficulties, *School Science and Mathematics Journal*, Hunter College, City University of New York. accessed 1/4/2012. http://www.rachaelwelder.com/research/Improving_Algebra_Preparation.html.